

Analyse 1

Notes de cours faites par Jonathan Godin

Table des matières

Introduction.....	2
Chapitre 1. Nombres réels.....	2
1.1. Rationnels et réels.....	2
1.2. Inégalités.....	2
1.3. Supremums et infimums.....	8
1.4. Axiome de complétude.....	9
1.5. Dénombrabilité.....	9
1.6. Topologie de $\mathbb{R}$	9

Introduction

Ce document est un résumé des notes de cours pour le cours d'analyse 1 à l'Université de Montréal. Il contient les définitions et les énoncés des résultats importants, sans toutefois élaborer les détails ou faire les exemples. Le but est de permettre à l'étudiant·e de savoir où on est et vers où on s'en va, sans toutefois tout donner. Il semble que la prise de note, qui peut sembler primitive face à toute la technologie, reste le meilleur moyen de transmettre un cours de mathématique abstrait.



Idée inspirée du $\text{\TeX}$ book, les paragraphes comme celui-ci, précédés d'un sinus du topologue, contiennent des remarques ou des explications qui peuvent être ignorées lors d'une première lecture. Ils sont composés en taille 10pt, donc on peut facilement savoir où se termine le passage. Ces sections seront étiquetées ainsi pour l'une des raisons suivantes : des outils qui ne sont pas supposés maîtrisés pour le cours sont utilisés, le raisonnement devient un peu plus difficile à suivre (c'est ce qui a inspiré le symbole), le contenu s'éloigne un peu trop de la discussion ou du cadre du cours, un exercice plus difficile.

Chapitre 1

Nombres réels

1.1. Rationnels et réels

Proposition 1.1. Soit $a, b \in \mathbb{Q}$. Si $a < b$, alors il existe $c \in \mathbb{Q}$ tel que $a < c < b$.

Proposition 1.2. $\forall a \in \mathbb{Q}, a^2 \neq 2$.

Axiome. Il existe un corps totalement ordonné, noté $\mathbb{R}$, tel que

- 1) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ est un sous-corps totalement ordonné de $\mathbb{R}$;
- 2) $\mathbb{R}$ possède la *propriété de complétude* (section 1.4).

1.2. Inégalités

Rappels. 1) $a \leq b$ et $b \leq c \Rightarrow a \leq c$

2) $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

3) $a \leq b$ et $c \geq 0 \Rightarrow ac \leq bc$

4) $a \leq b$ et $c \leq 0 \Rightarrow ac \geq bc$

Note : $(a, b) := \{x : a < x < b\}$

$[a, b] := \{x : a \leq x \leq b\}$

Définition 1.1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La *valeur absolue* de x est le nombre réel

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0; \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Proposition 1.2. $\forall x, y \in \mathbb{R}$

1) $|x| \geq 0$

3) $|x| = 0 \iff x = 0$

4) $|x| = |-x| = \max\{x, -x\}$

5) $|xy| = |x||y|$

6) $-|x| \leq x \leq |x|$

7) $|x| \leq y \iff -y \leq x \leq y$

8) $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$

L'inégalité triangulaire est $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Théorème 1.3. (Inégalité de Bernoulli) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \geq -1, (1 + t)^n \geq 1 + nt$.

1.3. Supremums et infimums

Définition 1.1. Soit $E \subseteq \mathbb{R}$.

- 1) E est *majoré* s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$, on a $x \leq c$.
On dit alors que c est un *majorant* de E .
 E est *minoré* s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$, on a $x \geq c$.
On dit alors que c est un *minorant* de E .
- 2) E est *borné* s'il est minoré et majoré.

Proposition 1.2. E est borné $\iff \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in E, |x| \leq c$.

Définition 1.3. Soit $E \subseteq \mathbb{R}$. On dit que $c \in \mathbb{R}$ est le *supremum* (resp. *infimum*) de E si

- 1) c est un majorant (resp. minorant) de E et
 - 2) si c' est un autre majorant (resp. minorant) de E , alors $c' \geq c$ (resp. $c' \leq c$).
- On note le supremum de E par $\sup E$ et l'infimum de E par $\inf E$, lorsqu'ils existent.

1.4. Axiome de complétude

Axiome (de complétude). Si $E \subseteq \mathbb{R}$ est non vide et majoré, alors $\sup E$ existe.

Théorème 1.1. (Propriété d'Archimède) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$.

Corollaire 1.2. 1) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n > y$

2) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists! n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n + 1$. On note $[x] := n$ (fonction planchée)

3) Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$. Alors $\exists r \in \mathbb{Q}$ tel que $x < r < y$.

Théorème 1.3. 1) Racine n^e : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0, \exists! y \geq 0, y^n = x$ ($\sqrt[n]{x} = y$).

2) L'axiome de complétude est faux dans $\mathbb{Q}$.

Corollaire 1.4. Densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$. Alors $\exists r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $x < r < y$.

Définition 1.5. Soit $q \in \mathbb{Q}, m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $q = \frac{m}{n}$. Pour $x \geq 0$, on pose

- 1) $x^q := \sqrt[n]{x^m}$ si $q \geq 0$;
- 2) $x^q := \left(\frac{1}{x}\right)^{-q}$ si $q < 0$ et $x \neq 0$

1.5. Dénombrabilité

Définition 1.1.

- 1) Deux ensembles A et B ont le même cardinal s'il existe une bijection $\varphi: A \rightarrow B$.
- 2) Un ensemble A est *dénombrable* s'il a le même cardinal que $\mathbb{N}$.

1.6. Topologie de $\mathbb{R}$

Définition 1.1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$.

1. La boule ouverte de centre a et de rayon r est

$$B(a, r) := \{x \in X \mid |a - x| < r\}.$$

2. La boule fermée de centre a et de rayon r est

$$\overline{B}(a, r) := \{x \in X \mid |a - x| \leq r\}.$$

3. La boule pointée de centre a et de rayon r est

$$\dot{B}(a, r) := B(a, r) \setminus \{a\}.$$

Définition 1.2. Un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}$ est dit *ouvert dans $\mathbb{R}$* si pour tout $x \in E$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq E$.

Proposition 1.3. (Propriétés des ouverts) Soit U_i ($i \in I$) des ouverts dans $\mathbb{R}$. Alors

- 1) $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont ouverts dans $\mathbb{R}$;
- 2) $\bigcup_{i \in I} U_i$ est ouvert dans $\mathbb{R}$;
- 3) Si $\text{card}(I) < \infty$, alors $\bigcap_{i \in I} U_i$ est ouvert dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.4. On dit que $F \subseteq \mathbb{R}$ est *fermé* si $F^c = X \setminus F$ est ouvert.

Proposition 1.5. (Propriétés des fermés) Soit (X, τ) un espace topologique et F_i ($i \in I$) des fermés de X .

1. $\emptyset$ et X sont fermés dans X ;
2. $\bigcap_{i \in I} F_i$ est fermé dans X ;
3. Si $\text{card}(I) < \infty$, alors $\bigcup_{i \in I} F_i$ est fermé dans X .

Démonstration. Cela suit de la dualité entre ouverts et fermés et des propriétés des ouverts. $\square$

Définition 1.6. Soit $E \subseteq \mathbb{R}$.

1. On dit que $x \in \mathbb{R}$ est un *point limite* de E si pour tout $r > 0$, $\dot{B}(x, r) \cap E$ est non vide. (Autrement dit, pour tout $r > 0$, il existe $y \in B(x, r) \cap E$ tel que $y \neq x$.)
2. L'ensemble dérivé de E , noté E' , est l'ensemble des points limites de E .

Proposition 1.7. Soit $E \subseteq \mathbb{R}$. Alors E est fermé ssi $E' \subseteq E$.

Définition 1.8. On dit $E \subseteq \mathbb{R}$ est compact ssi E est borné et fermé.
