

Analyse 1

Notes de cours faites par Jonathan Godin

Table des matières

Chapitre 1. Nombres réels.....	3
1.1. Rationnels et réels.....	3
1.2. Inégalités.....	3
1.3. Supremums et infimums.....	7
1.4. Axiome de complétude.....	8
1.5. Dénombrabilité.....	8
1.6. Topologie de $\mathbb{R}$	8
Chapitre 2. Suites.....	9
2.1. Convergence.....	10
2.2. Calcul des limites.....	11
2.3. Sous-suites, suites de Cauchy et suites récurrentes.....	12
Chapitre 3. Séries.....	12
3.1. Notions de base.....	12
3.2. Séries à termes positifs.....	13
3.3. Séries alternées.....	14
3.4. Convergence absolue.....	15
3.5. Séries entières.....	15
Chapitre 4. Fonctions continues.....	16
4.1. Limites de fonctions.....	16
4.2. Fonctions continues en un point.....	18
4.3. Fonctions continues sur un intervalle.....	18
Chapitre 5. Calcul différentiel.....	19
5.1. Définition de la dérivée.....	19
5.2. Règles de calcul.....	20
5.3. Extremums.....	20
5.4. Théorème de Rolle.....	21
5.5. Théorème des accroissements finis.....	21
5.6. Règles de l'Hôpital.....	21
5.7. Développements limités.....	22
5.8. Théorème de Taylor.....	22

Introduction

Ce document est un résumé des notes de cours pour le cours d'analyse 1 à l'Université de Montréal. Il contient les définitions et les énoncés des résultats importants, sans toutefois élaborer les détails ou faire les exemples. Le but est de permettre à l'étudiant·e de savoir où on est et vers où on s'en va, sans toutefois tout donner. Il semble que la prise de note, qui peut sembler primitive face à toute la technologie, reste le meilleur moyen de transmettre un cours de mathématique abstrait.



Idée inspirée du $\text{\TeX}$ book, les paragraphes comme celui-ci, précédés d'un sinus du topologue, contiennent des remarques ou des explications qui peuvent être ignorées lors d'une première lecture. Ils sont composés en taille 10pt, donc on peut facilement savoir où se termine le passage. Ces sections seront étiquetées ainsi pour l'une des raisons suivantes : des outils qui ne sont pas supposés maîtrisés pour le cours sont utilisés, le raisonnement devient un peu plus difficile à suivre (c'est ce qui a inspiré le symbole), le contenu s'éloigne un peu trop de la discussion ou du cadre du cours, un exercice plus difficile.

Chapitre 1

Nombres réels

1.1. Rationnels et réels

Proposition 1.1. Soit $a, b \in \mathbb{Q}$. Si $a < b$, alors il existe $c \in \mathbb{Q}$ tel que $a < c < b$.

Proposition 1.2. $\forall a \in \mathbb{Q}, a^2 \neq 2$.

Axiome. Il existe un corps totalement ordonné, noté $\mathbb{R}$, tel que

- 1) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ est un sous-corps totalement ordonné de $\mathbb{R}$;
- 2) $\mathbb{R}$ possède la *propriété de complétude* (section 1.4).

1.2. Inégalités

Rappels. 1) $a \leq b$ et $b \leq c \Rightarrow a \leq c$

2) $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

3) $a \leq b$ et $c \geq 0 \Rightarrow ac \leq bc$

4) $a \leq b$ et $c \leq 0 \Rightarrow ac \geq bc$

Note : $(a, b) := \{x : a < x < b\}$

$[a, b] := \{x : a \leq x \leq b\}$

Définition 1.1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La *valeur absolue* de x est le nombre réel

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0; \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Proposition 1.2. $\forall x, y \in \mathbb{R}$

1) $|x| \geq 0$

3) $|x| = 0 \iff x = 0$

4) $|x| = |-x| = \max\{x, -x\}$

5) $|xy| = |x||y|$

6) $-|x| \leq x \leq |x|$

7) $|x| \leq y \iff -y \leq x \leq y$

8) $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$

L'inégalité triangulaire est $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Théorème 1.3. (Inégalité de Bernoulli) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \geq -1, (1 + t)^n \geq 1 + nt$.

1.3. Supremums et infimums

Définition 1.1. Soit $E \subseteq \mathbb{R}$.

- 1) E est *majoré* s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$, on a $x \leq c$.
On dit alors que c est un *majorant* de E .
 E est *minoré* s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$, on a $x \geq c$.
On dit alors que c est un *minorant* de E .
- 2) E est *borné* s'il est minoré et majoré.

Proposition 1.2. E est borné $\iff \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in E, |x| \leq c$.

Définition 1.3. Soit $E \subseteq \mathbb{R}$. On dit que $c \in \mathbb{R}$ est le *supremum* (resp. *infimum*) de E si

- 1) c est un majorant (resp. minorant) de E et
 - 2) si c' est un autre majorant (resp. minorant) de E , alors $c' \geq c$ (resp. $c' \leq c$).
- On note le supremum de E par $\sup E$ et l'infimum de E par $\inf E$, lorsqu'ils existent.

1.4. Axiome de complétude

Axiome (de complétude). Si $E \subseteq \mathbb{R}$ est non vide et majoré, alors $\sup E$ existe.

Théorème 1.1. (Propriété d'Archimède) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$.

Corollaire 1.2. 1) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n > y$

2) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists! n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n + 1$. On note $[x] := n$ (fonction planchée)

3) Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$. Alors $\exists r \in \mathbb{Q}$ tel que $x < r < y$.

Théorème 1.3. 1) Racine n^e : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0, \exists! y \geq 0, y^n = x$ ($\sqrt[n]{x} = y$).

2) L'axiome de complétude est faux dans $\mathbb{Q}$.

Corollaire 1.4. Densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$. Alors $\exists r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $x < r < y$.

Définition 1.5. Soit $q \in \mathbb{Q}, m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $q = \frac{m}{n}$. Pour $x \geq 0$, on pose

- 1) $x^q := \sqrt[n]{x^m}$ si $q \geq 0$;
- 2) $x^q := \left(\frac{1}{x}\right)^{-q}$ si $q < 0$ et $x \neq 0$

1.5. Dénombrabilité

Définition 1.1.

- 1) Deux ensembles A et B ont le même cardinal s'il existe une bijection $\varphi: A \rightarrow B$.
- 2) Un ensemble A est *dénombrable* s'il a le même cardinal que $\mathbb{N}$.

1.6. Topologie de $\mathbb{R}$

Définition 1.1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$.

1. La boule ouverte de centre a et de rayon r est

$$B(a, r) := \{x \in X \mid |a - x| < r\}.$$

2. La boule fermée de centre a et de rayon r est

$$\overline{B}(a, r) := \{x \in X \mid |a - x| \leq r\}.$$

3. La boule pointée de centre a et de rayon r est

$$\dot{B}(a, r) := B(a, r) \setminus \{a\}.$$

Définition 1.2. Un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}$ est dit *ouvert dans $\mathbb{R}$* si pour tout $x \in E$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq E$.

Proposition 1.3. (Propriétés des ouverts) Soit U_i ($i \in I$) des ouverts dans $\mathbb{R}$. Alors

- 1) $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont ouverts dans $\mathbb{R}$;
- 2) $\bigcup_{i \in I} U_i$ est ouvert dans $\mathbb{R}$;
- 3) Si $\text{card}(I) < \infty$, alors $\bigcap_{i \in I} U_i$ est ouvert dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.4. On dit que $F \subseteq \mathbb{R}$ est *fermé* si $F^c = X \setminus F$ est ouvert.

Proposition 1.5. (Propriétés des fermés) Soit (X, τ) un espace topologique et F_i ($i \in I$) des fermés de X .

1. $\emptyset$ et X sont fermés dans X ;
2. $\bigcap_{i \in I} F_i$ est fermé dans X ;
3. Si $\text{card}(I) < \infty$, alors $\bigcup_{i \in I} F_i$ est fermé dans X .

Démonstration. Cela suit de la dualité entre ouverts et fermés et des propriétés des ouverts. $\square$

Définition 1.6. Soit $E \subseteq \mathbb{R}$.

1. On dit que $x \in \mathbb{R}$ est un *point limite* de E si pour tout $r > 0$, $\dot{B}(x, r) \cap E$ est non vide. (Autrement dit, pour tout $r > 0$, il existe $y \in B(x, r) \cap E$ tel que $y \neq x$.)
2. L'ensemble dérivé de E , noté E' , est l'ensemble des points limites de E .

Proposition 1.7. Soit $E \subseteq \mathbb{R}$. Alors E est fermé ssi $E' \subseteq E$.

Définition 1.8. On dit $E \subseteq \mathbb{R}$ est compact ssi E est borné et fermé.

Chapitre 2

Suites

2.1. Convergence

a) Convergence.

Définition 2.1. Une *suite* est une fonction $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Le *terme de rang n* (ou terme général) de la suite est $a_n := a(n)$.

On écrit $a = (a_1, a_2, a_3, \dots) = (a_n) = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_n)_{n=1}^\infty$.

Définition 2.2. 1) (a_n) est *majorée* (resp. *minorée*, *bornée*) si $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est majoré (resp. minoré, borné).

2) (a_n) est (*strictement*) *croissante* si $(a_{n+1} > a_n)$ $a_{n+1} \geq a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) (a_n) est (*strictement*) *décroissante* si $(a_{n+1} < a_n)$ $a_{n+1} \leq a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) (a_n) est *monotone* si elle est croissante ou décroissante.

Définition 2.3. Une suite (a_n) est dite *convergente* s'il existe un nombre $L \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ pour lequel $|a_n - L| < \varepsilon$ dès que $n \geq N$.

On dit que L est la *limite* de (a_n) et on écrit $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ou $a_n \rightarrow L$ (lorsque $n \rightarrow \infty$).

Si (a_n) n'est pas convergente, alors elle est *divergente*.

b) Résultats de base.

Théorème 2.4. Si (a_n) est convergente, alors sa limite est unique.

Théorème 2.5. Si (a_n) est convergente, alors (a_n) est bornée.

Théorème 2.6. Si (a_n) est croissante et majorée, alors (a_n) est convergente et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n =: L.$$

On écrit $a_n \uparrow L$.

Résultat analogue si (a_n) est décroissante et minorée.

Théorème 2.7. Pour tout $M \in \mathbb{N}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+M-1}.$$

c) Limites infinies.

Définition 2.8. On dit qu'une suite (a_n) *tend vers* ∞ (ou *diverge vers* ∞) si pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $a_n \geq M$.

Pour $-\infty$: $a_n \leq M$.

2.2. Calcul des limites

Théorème 2.1. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, où $a, b \in \mathbb{R}$, alors

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$
- 4) si $b_n \neq 0$ et $b \neq 0$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$
- 5) si $a_n \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $a \leq b$
- 6) si $a_n \geq 0$, et $p \in \mathbb{N}$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{a}$

Théorème 2.2. (des deux gendarmes). Soit $(a_n), (b_n), (c_n)$ des suites telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$ et $a_n \leq b_n \leq c_n$ pour tout $n \geq N$. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$.

Corollaire 2.3. Si $|a_n| \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, alors $a_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Théorème 2.4. Si $a_n \rightarrow \infty$ et $b_n \geq a_n$ pour tout $n \geq N$, alors $b_n \rightarrow \infty$.

Progression géométrique.

Définition 2.5. Une *progression géométrique* de raison $q \neq 1$ est une suite de la forme $(a, aq, aq^2, aq^3, \dots) = (aq^{n-1})_{n \in \mathbb{N}}$.

Théorème 2.6. 1. $|q| > 1 \Rightarrow |q|^n \rightarrow \infty$.

2. $|q| < 1 \Rightarrow |q|^n \rightarrow 0$.

Théorème 2.7. Soit $q \neq 1$. On pose $s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$.

- 1) $s_n = \frac{1-q^n}{1-q}$
- 2) Si $|q| < 1$, alors $s_n \rightarrow \frac{1}{1-q}$.
- 3) Si $|q| > 1$, alors (s_n) diverge et $|s_n| \rightarrow \infty$.

Racine n -ième.

Théorème 2.8. 1) $n^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$
2) Si $a > 0$, alors $a^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$.

Le nombre e .

Proposition 2.9. 1) On pose $s_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$. Alors (s_n) converge et on pose $e := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$.
2) On pose $t_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Alors (t_n) est strictement croissante et $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = e$.

2.3. Sous-suites, suites de Cauchy et suites récurrentes

Définition 2.1. Soit (a_n) et (b_k) deux suites. On dit que (b_k) est une *sous-suite* de (a_n) s'il existe des entiers $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ tels que $b_k = a_{n_k}$.

Proposition 2.2. $a_n \rightarrow L$ ssi toutes les sous-suites de (a_n) convergent vers L .

Théorème 2.3. (de Bolzano-Weierstrass). Toute suite bornée possède une sous-suite convergente. ■

Définition 2.4. On dit que (a_n) est une *suite de Cauchy* (parfois suite fondamentale) si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N, |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Théorème 2.5. Une suite est de Cauchy ssi elle est convergente.

Chapitre 3

Séries

3.1. Notions de base

Définition 3.1. 1) Étant donné une suite (a_n) , la *série* s de terme général a_n est l'expression

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

2) On pose $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$. On appelle (s_n) la *suite des sommes partielles* de s .

3) Si (s_n) converge, alors on dit que la série s *converge* et on écrit

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k.$$

Si (s_n) diverge, alors on dit que s diverge.

Théorème 3.2. (Condition nécessaire) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Théorème 3.3. Soit $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ deux séries convergentes. Alors pour tout $c, d \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (ca_n + db_n) = cs + dt.$$

Théorème 3.4. (Queue de la série) Soit $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $t = \sum_{n=N}^{\infty} a_n$. Alors s et t sont de même nature.

Théorème 3.5. (Regroupements) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=i_n}^{i_{n+1}-1} a_j$ converge vers $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,
où $i_n \in \mathbb{N}$ et $1 = i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < \cdots$.

3.2. Séries à termes positifs

Définition 3.1. Une série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est dite à *termes positifs* si $a_n \geq 0$ pour tout n .

Théorème 3.2. (Critère de comparaison) Supposons que $0 \leq a_n \leq b_n$ pour tout n . Alors

- 1) si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge;
- 2) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

Théorème 3.3. (Critère de condensation de Cauchy) Soit (a_n) une suite positive et décroissante. Alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ sont de même nature.

Exemple 3.2.1. La série de Riemann. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge ssi $p > 1$.

Théorème 3.4. (Critère du quotient) Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ des séries à termes positifs. Si $b_n \neq 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L \neq 0, \infty$, alors les deux séries sont de même nature.

Théorème 3.5. (Critère de d'Alembert) Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série où $a_n > 0$. Supposons que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in [0, \infty]$. Alors

- 1) si $L < 1$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge;
- 2) si $L > 1$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Théorème 3.6. (Critère de la racine de Cauchy) Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, une série à termes positifs. Supposons que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L \in [0, \infty]$. Alors

- 1) si $L < 1$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge;
- 2) si $L > 1$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

3.3. Séries alternées

Définition 3.1. Une série est *alternée* si elle est de la forme $\sum_{n=N}^{\infty} (-1)^n a_n$, où $N \in \mathbb{Z}$ et $a_n \geq 0$.

Théorème 3.2. (Critère de Leibniz) Soit $s = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ une série alternée. Si $a_n \downarrow 0$, alors

1) s converge et

2) $|s - s_n| \leq a_{n+1}$, où $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$.

3.4. Convergence absolue

Définition 3.1. Une série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est dite

1) *absolument convergente* (AC) si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge;

2) *conditionnellement convergente* (CC) si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge et $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge;

Théorème 3.2. Si une série est absolument convergente, alors elle converge.

Définition 3.3. Un réarrangement de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est une série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ telle que $b_n = a_{f(n)}$, où $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une bijection.

Théorème 3.4. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est AC, alors tout réarrangement est AC et converge vers la même limite.

Théorème 3.5. (Riemann, facultatif) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est CC, alors pour tout $r \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, il existe un réarrangement $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tel que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = r$.

Théorème 3.6. (Produit de Cauchy) Soit $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et $t = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ deux séries. On pose

$$p = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

1) Si s est AC et t est convergente, alors p converge et $p = st$.

2) Si t est, de plus, AC, alors p est AC.

3.5. Séries entières

Définition 3.1. Une *série entière* est une série de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, où $a_n, x \in \mathbb{R}$.

Théorème 3.2. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière. Il existe un unique nombre $R \in [0, \infty]$ tel que

- 1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est AC si $|x| < R$ et
- 2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est divergente si $|x| > R$.

R est le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et $(-R, R)$, son intervalle de convergence.

Définition 3.3. On définit la fonction exponentielle $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ par

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Remarque. On a $\exp(1) = e$ et, pour tout $q \in \mathbb{Q}$, on a $\exp(q) = e^q$ (exercice série 3). On écrit $\exp(x) =: e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Chapitre 4

Fonctions continues

4.1. Limites de fonctions

Définition 4.1. Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ et $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1) D est le *domaine* de f .

Si D n'est pas donné, alors on pose $D := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ est définie}\}$.

2) $f(D) := \{f(x) \mid x \in D\}$ est l'*image* de f .

Définition 4.2. On dit que $I \subseteq \mathbb{R}$ est un *intervalle* si pour tout $x, y \in I$, pour tout $z \in \mathbb{R}$, $x < z < y \Rightarrow z \in I$.

Définition 4.3. Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{D}$. On dit que $f(x)$ *tend vers* L lorsque x *tend vers* a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

On écrit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ou $f(x) \rightarrow L$ ($x \rightarrow a$).

Théorème 4.4. Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{D}$. Alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ si et seulement si pour toute suite (x_n) dans $D \setminus \{a\}$ telle que $x_n \rightarrow a$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$.

Théorème 4.5. Soit $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions. Si $f(x) \rightarrow L$ et $g(x) \rightarrow M$ lorsque $x \rightarrow a$, alors

1) $|f(x)| \rightarrow |L|$

2) $f(x) + g(x) \rightarrow L + M$

3) $f(x)g(x) \rightarrow LM$

4) $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{L}{M}$ si $M \neq 0$

5) si $f(x) \leq g(x)$, alors $L \leq M$

6) $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt[n]{f(x)} \rightarrow \sqrt[n]{L}$ si $f(x) \geq 0$

lorsque $x \rightarrow a$.

Corollaire 4.6. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$, où P, Q sont des polynômes et $Q(a) \neq 0$.

Extension de la notion de limite.

Définition 4.7. Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

- 1) Limite à droite : on pose $E := D \cap (a, \infty)$ et $g := f|_E$. Si $a \in \overline{E}$, alors $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) := \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. De façon équivalente

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Limite à gauche : on pose $E := D \cap (-\infty, a)$ et $g := f|_E$. Si $a \in \overline{E}$, alors $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) := \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. De façon équivalente

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, -\delta < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

- 2) Limite infinie : si $a \in \overline{D}$, on dit que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ (resp $-\infty$) si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in D, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) \geq M \quad (\text{resp. } \leq M).$$

- 3) Limite à l'infini : S'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $(a, \infty) \subseteq D$, alors on dit que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in D, x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

S'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $(-\infty, a) \subseteq D$, alors on dit que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in D, x < M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Remarque. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$

4.2. Fonctions continues en un point

Définition 4.1. Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

- 1) f est *continue en* $a \in D$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
- 2) f est *discontinue en* a si elle n'est pas continue en a .
- 3) f est *continue sur* D (ou simplement *continue*) si pour tout $a \in D$, elle est continue en a .

Proposition 4.2. Les énoncés suivants sont équivalents.

- 1) f est continue en a
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
- 3) pour toute suite (x_n) dans D , si $x_n \rightarrow a$, alors $f(x_n) \rightarrow f(a)$.

Proposition 4.3. Si $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues en $a \in D$, alors $|f|$, $f + g$, fg , f/g (si $g(a) \neq 0$) et $\sqrt[n]{f}$ (si $f \geq 0$) sont continues en a .

Proposition 4.4. Si $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $a \in D$ et $g: f(D) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $f(a) \in f(D)$, alors $g \circ f$ est continue en a .

4.3. Fonctions continues sur un intervalle

Théorème (des valeurs intermédiaire) (TVI) **4.1.** Soit I un intervalle et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $a, b \in I$, si $f(a) < f(b)$, alors pour tout c tel que $f(a) < c < f(b)$, il existe x entre a et b tel que $f(x) = c$.

Définition 4.2. On dit que $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ est majorée/minorée/bornée si $f(D)$ est majorée/minorée/bornée.

Théorème 4.3. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$. Alors f est bornée.

Théorème 4.4. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$. Alors il existe $c, d \in [a, b]$ tels que $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ pour tout $x \in [a, b]$.

Théorème 4.5. Soit I un intervalle et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

- 1) $J := f(I)$ est un intervalle;
- 2) $f: I \rightarrow J$ est inversible ssi f est strictement monotone;
- 3) si 2) tient, alors f^{-1} est continue.

Exemple 4.3.1. Comme $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ est strictement croissante (exercice série 3) et continue (exercice série 4), alors elle est inversible. Son inverse est la fonction logarithme naturelle $\log: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, qui est également continue et strictement monotone, par le théorème précédent.

On peut voir qu'elle est, en fait, strictement croissante simplement par le fait que pour $x < y$, si $\log(x) \geq \log(y)$, alors $e^{\log x} \geq e^{\log y}$, c'est-à-dire $x \geq y$, qui est une contradiction.

Chapitre 5

Calcul différentiel

5.1. Définition de la dérivée

Définition 5.1. Soit I un intervalle et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. On dit que f est *dérivable en* $a \in I$ si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe.

2. Si f est dérivable en a , on note la valeur de la limite par $f'(a)$ et on l'appelle la *dérivée de f en a* .
3. On dit que f est dérivable (sur I) si pour tout $a \in I$, f est dérivable en a .

Notation. On note la dérivée de f en a par $f'(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$ ou $\frac{dy}{dx}(a)$.

Dérivée d'ordre supérieur. Si f est dérivable sur I , alors cela définit une fonction $f': I \rightarrow \mathbb{R}$. Il se peut que f' soit dérivable en un point $a \in I$. Dans ce cas, on écrit $f''(a) := (f')'(a)$ et on l'appelle la *dérivée seconde* de f en a ou la dérivée d'ordre 2. Inductivement, on écrit $f^{(n)}(a) := \left(f^{(n-1)}\right)'(a)$.

5.2. Règles de calcul

Soit I un intervalle et $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions dérivables en a .

1. Sommes. $(f + g)$ est dérivable en a et $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
2. Produits. fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
3. Quotients. Si $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.
4. Fonctions composées. Règle de dérivation en chaîne : si f est dérivable en a et g dérivable en $b := f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a) = g'(b)f'(a)$.

5.3. Extremums

Définition 5.1. Soit I un intervalle et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit $a \in I$. On dit que a est un *maximum* (resp. *minimum*) *local* s'il existe $(c, d) \subseteq I$ tel que $a \in (c, d)$ et $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$) pour tout $x \in (c, d)$.

Si a est au bord de l'intervalle I , alors (c, d) sera plutôt de la forme $[a, d)$ ou $(c, a]$.

Théorème 5.2. Supposons que $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ atteint un minimum ou un maximum en un point $a \in I$. Supposons de plus que a est un point intérieur de I . Si f est dérivable en a , alors $f'(a) = 0$.

Définition 5.3. On appelle les points $x \in I$ où $f'(x) = 0$ les *points critiques* de f . (Dans certains contextes, les points critiques comprennent les points où f n'est pas dérivable.)

5.4. Théorème de Rolle

Théorème de Rolle. 5.1. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

- f est continue sur $[a, b]$;
- f est dérivable sur (a, b) ;
- $f(a) = f(b) = 0$.

Alors il existe $c \in (a, b)$ tel que $f'(c) = 0$.

Corollaire 5.2. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et n fois dérivable sur (a, b) . Supposons que $f^{(n)}(x) \neq 0$ pour tout $x \in (a, b)$. Alors l'équation $f(x) = 0$ possède au plus n solutions dans $[a, b]$.

5.5. Théorème des accroissements finis

Théorème (des accroissements finis) 5.1. (TAC) Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur (a, b) . Alors il existe $c \in (a, b)$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Corollaire 5.2. Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors f est constante sur I .

Théorème 5.3. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur un intervalle I ouvert.

- (i) f est croissantes $\iff f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.
- (ii) Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement croissante sur I .

On a les résultats analogues pour f décroissantes.

5.6. Règles de l'Hôpital

Théorème 5.1. Soit $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions dérivables. Soit $a \in I$ et supposons que $f(a) = 0$ et $g(a) = 0$. Si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Lemme 5.2. Soit $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur $[a, b]$ et dérivables sur (a, b) . Il existe $c \in (a, b)$ tel que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Théorème 5.3. Soit $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = \infty.$$

Si $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, alors $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

De plus, l'énoncé est vrai si on remplace b par $+\infty$.

5.7. Développements limités

Théorème (des développements limités) 5.1. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ et soit a dans l'intérieur de I . Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $f^{(n)}(a)$ existe. Alors

$$f(a + h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \varepsilon(h) h^n,$$

où $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$.

Théorème 5.2. 1. Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$, alors f a un minimum local en a .

2. Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$, alors f a un maximum local en a .

Théorème 5.3. (Méthode de Newton) Soit a dans l'intérieur de I . Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. Supposons que $f(a) = 0$ et $f'(a) \neq 0$. On pose

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Alors il existe $\delta > 0$ et $M > 0$ tels que si $x_0 \in [a - \delta, a + \delta]$, alors $x_n \rightarrow a$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et $|x_{n+1} - a| \leq M|x_n - a|^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5.8. Théorème de Taylor

Théorème (de Taylor) **5.1.** Soit I un intervalle. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $(n+1)$ -dérivable et soit $a \in I$ et $a + h \in I$. Alors, il existe $\theta \in (0, 1)$ tel que

$$f(a + h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \frac{f^{(n+1)}(a + \theta h)}{(n+1)!} h^{n+1}.$$

Remarque. Le cas $n = 0$ est le théorème des accroissements finis.

Corollaire 5.2. Sous les mêmes hypothèses que le théorème, on a

$$f(a + h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + R_{n+1}(h),$$

$$\text{où } |R_{n+1}(h)| \leq \max_{x \in [a, a+h]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} |h|^{n+1}.$$

Tracer de graphe.

Stratégie générale pour tracer le graphe d'une fonction.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Examiner s'il y a de la symétrie.
3. Déterminer le signe de $f'(x)$ afin d'identifier les intervalles où f est croissante ou décroissante.
4. Déterminer le signe de f'' afin d'identifier les intervalles où f est convexe (f' croissante) ou concave (f' décroissante).
5. Étudier les comportements limites de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow \pm\infty$ et des points où f n'est pas définie.
6. Évaluer f en quelques points clés (p.ex. là où le graphe traverse les axes et où $f'(x) = 0$).