

# Analyse 1

Université de Montréal — Département de mathématique

Examen intra 2 (solutionnaire partiel)

Enseignant : Jonathan Godin

Mardi 7 juillet 2026

Session : E26

Aucun matériel permis. L'examen est sur 30 points et il dure 1h50 (110 minutes).  
**Justifiez toutes vos réponses.**

**Question 1.** (8pts) Vrai ou faux. Si l'énoncé est vrai, le montrer. S'il est faux, donner un contre-exemple.

- a) Si  $\sum a_n$  est absolument convergent et  $\sum b_n$  est convergente, alors  $\sum a_n b_n$  converge.
- b) Soit  $(c_n)$  une suite. Si  $|c_{n+1} - c_n| \leq |c_n|$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $(c_n)$  est une suite de Cauchy.

**Solution.** a) Vrai. Comme  $(b_n)$  est convergente, elle est bornée, disons pas  $M$ . On a donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq M \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty,$$

d'où  $\sum |a_n b_n|$  est convergente et à fortiori,  $\sum a_n b_n$  aussi.

b) Faux. On peut prendre, par exemple,  $c_n = n$ . On a alors  $|c_{n+1} - c_n| = |n+1 - n| = 1 \leq n = |c_n|$ , donc  $(c_n)$  vérifie les hypothèses. Or,  $(c_n)$  n'est pas une suite de Cauchy, puisqu'elle diverge.

**Question 2.** (4pts) Soit  $U \subseteq \mathbb{R}$  un ouvert et  $(a_n)$  une suite. Montrer que si  $a_n \rightarrow L \in U$ , alors il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ , on a  $a_n \in U$ .

**Solution.** Comme  $U$  est ouvert, il existe  $r > 0$  tel que  $B(L, r) \subseteq U$ . Comme  $a_n \rightarrow L$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ , on a  $|a_n - L| < r$ . Ainsi, on a  $a_n \in B(L, r) \subseteq U$  pour tout  $n \geq N$ .

**Question 3.** (6pts) Déterminer la nature des séries suivantes.

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{n}$                       b)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

**Solution.** a) Diverge. On pose  $b_n = \frac{1}{n}$  et  $a_n = \frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{n}$ . On voit que

$$\frac{a_n}{b_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e > 0,$$

donc par le critère du quotient,  $\sum a_n$  diverge puisque  $\sum b_n$  diverge.

b) Converge conditionnellement. On pose  $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ . On voit que

$$a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

On a donc  $a_n \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}$  et par le critère de comparaison,  $\sum a_n$  diverge. On peut également utiliser le critère du quotient avec  $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

Vérifier maintenant que  $\sum (-1)^n a_n$  converge. Comme  $\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} > \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ , il suit que  $a_n > a_{n+1}$ , donc  $(a_n)$  est décroissante. De plus, il est clair que  $a_n \rightarrow 0$ , car  $0 < a_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ . Ainsi, par le critère de Leibniz, la série converge.

On conclut que la série est conditionnellement convergente.

Note : pour une réponse complète, il faut montrer que la série n'est pas absolument convergente, il n'est pas suffisant de seulement appliquer le critère de Leibniz.

**Question 4.** (12pts) Soit  $(k_n)$  une suite croissante telle que  $k_n > 0$  et  $k_n \rightarrow \infty$ . Soit  $(x_n)$  une suite telle que

$$x_n - x_{n-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{k_n} \quad \text{pour } n \geq 1.$$

- a) Montrer que la sous-suite que  $(x_{2n})$  est croissante, que la sous-suite  $(x_{2n+1})$  est décroissante et que  $x_{2n} \leq x_{2n+1}$  pour  $n \geq 0$ .
- b) Montrer que  $(x_n)$  est convergente en utilisant le a).

- c) On pose  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Montrer que  $x_n = x_0 + \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^{m+1}}{k_m}$  et déduire que

$$|x - x_n| < \frac{1}{k_{n+1}}.$$

*Indice pour le c).* Pensez à appliquer le bon critère.

**Solution.** a) D'abord, on a

$$x_n - x_{n-2} = x_n - x_{n-1} + x_{n-1} - x_{n-2} = \frac{(-1)^{n+1}}{k_n} + \frac{(-1)^n}{k_{n-1}}.$$

Ensuite, pour la sous-suite  $(x_{2n})$ , on a

$$x_{2n} - x_{2n-2} = \frac{-1}{k_{2n}} + \frac{1}{k_{2n-1}} = \frac{k_{2n} - k_{2n-1}}{k_{2n}k_{2n-1}} \geq 0,$$

donc  $x_{2n} \geq x_{2n-2}$ , d'où  $(x_{2n})$  est croissante.

On montre que  $(x_{2n+1})$  est décroissante de la même manière.

Enfin, on a

$$x_{2n+1} - x_{2n} = \frac{1}{k_{2n+1}} \geq 0,$$

donc  $x_{2n+1} \geq x_{2n}$ .

b) On sait que  $x_{2n} \leq x_{2n+1} \leq x_1$ , donc  $(x_{2n})$  est majorée par  $x_1$ . Il suit que  $x_{2n}$  est convergente, disons vers  $L$ . De la même manière,  $(x_{2n+1})$  est décroissante et minorée par  $x_0$ , donc elle converge, disons vers  $M$ . Ensuite, si on laisse  $n \rightarrow \infty$  dans l'équation

$$x_{2n+1} - x_{2n} = \frac{1}{k_{2n+1}},$$

on trouve  $M - L = 0$ , donc  $L = M$ . Par un exercice, comme  $(x_{2n})$  et  $(x_{2n+1})$  convergent vers la même limite, il suit que  $(x_n)$  converge.

(Si on ne fait pas appel à l'exercice, on peut procéder comme suit : comme  $x_{2n} \rightarrow L$  et  $x_{2n+1} \rightarrow L$ , il existe  $N_1$  et  $N_2$  tel que  $n \geq N_1 \Rightarrow |x_{2n} - L| < \varepsilon$  et  $n \geq N_2 \Rightarrow |x_{2n+1} - L| < \varepsilon$ . Ainsi, pour tout  $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ , on a  $|x_n - L| < \varepsilon$ , car c'est vérifié pour  $n$  pair ou  $n$  impair.)

c) On a

$$x_n - x_0 = \sum_{m=1}^n (x_m - x_{m-1}) = \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^{m+1}}{k_m}.$$

L'inégalité suit du critère de Leibniz, puisque  $(\frac{1}{k_n})$  est décroissante et tend vers 0.