

Analyse 1

Université de Montréal — Département de mathématique

Examen intra 2

Enseignant : Jonathan Godin

Mardi 7 juillet 2026

Session : E26

Aucun matériel permis. L'examen est sur 30 points et il dure 1h50 (110 minutes).
Justifiez toutes vos réponses.

Question 1. (8pts) Vrai ou faux. Si l'énoncé est vrai, le montrer. S'il est faux, donner un contre-exemple.

- a) Si $\sum a_n$ est absolument convergent et $\sum b_n$ est convergente, alors $\sum a_n b_n$ converge.
- b) Soit (c_n) une suite. Si $|c_{n+1} - c_n| \leq |c_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors (c_n) est une suite de Cauchy.

Question 2. (4pts) Soit $U \subseteq \mathbb{R}$ un ouvert et (a_n) une suite. Montrer que si $a_n \rightarrow L \in U$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $a_n \in U$.

Question 3. (6pts) Déterminer la nature des séries suivantes.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

Question 4. (12pts) Soit (k_n) une suite croissante telle que $k_n > 0$ et $k_n \rightarrow \infty$. Soit (x_n) une suite telle que

$$x_n - x_{n-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{k_n} \quad \text{pour } n \geq 1.$$

- a) Montrer que la sous-suite que (x_{2n}) est croissante, que la sous-suite (x_{2n+1}) est décroissante et que $x_{2n} \leq x_{2n+1}$ pour $n \geq 0$.
- b) Montrer que (x_n) est convergente *en utilisant le a)*.
- c) On pose $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Montrer que $x_n = x_0 + \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^{m+1}}{k_m}$ et déduire que

$$|x - x_n| < \frac{1}{k_{n+1}}.$$

Indice pour le c). Pensez à appliquer le bon critère.