

# Analyse 1

Université de Montréal — Département de mathématique

Examen intra 2 (solutionnaire partiel)

Enseignant : Jonathan Godin

Mercredi 9 juillet 2025

Session : E25

Aucun matériel permis. L'examen est sur 45 points et il dure 1h50 (110 minutes).  
**Justifiez toutes vos réponses.**

## Questions courtes.

**Question 1.** (10pts) Déterminer la nature des séries suivantes (absolument convergent, conditionnellement convergent ou divergent).

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{2^n + n}$

**Solution.** a) La série diverge. Voici deux façons de le faire.

1. On pose  $s_n = \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$ . On a alors

$$\begin{aligned} s_n &= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \sqrt{n+1} - \sqrt{1}. \end{aligned}$$

On voit que  $s_n \rightarrow \infty$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

2. On a

$$(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \left( \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right) = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

À partir de là, on peut déduire que la série diverge de différentes façons. En voici une. On a

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \geq \frac{2}{\sqrt{n+1}}$$

comme  $\sum \frac{2}{\sqrt{n+1}}$  diverge par le critère de Riemann, la série de départ diverge par le critère de comparaison.

b) La série diverge. En effet, on a

$$\frac{2^n}{2^n + n} = \frac{1}{1 + \frac{n}{2^n}} \rightarrow \frac{1}{1 + 0} = 1$$

lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Il suit que  $(-1)^n \frac{2^n}{2^n + n} \not\rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , donc la série diverge.

Remarques : 1. Comme la série diverge, elle n'est ni absolument convergente, ni conditionnellement convergente, donc il n'y a rien d'autre à montrer.

2. On peut montrer que  $\frac{n}{2^n} \rightarrow 0$  comme suit : on a  $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \geq 1+n+\frac{n(n+1)}{2}$ .

Il suit que

$$\frac{n}{2^n} \leq \frac{n}{1+n+\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{n}+1+\frac{n+1}{2}} \rightarrow 0.$$

3. Le critère de la racine de Cauchy et le critère de d'Alembert ne permettent pas de déterminer la convergence ou la divergence de la série. En effet, on a

$$\sqrt[n]{\frac{2^n}{2^n+n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{1+\frac{n}{2^n}}} \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad \frac{\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}+n+1}}{\frac{2^n}{2^n+n}} = 2 \frac{2^n+n}{2^{n+1}+n+1} = \frac{2 \frac{1}{2} + \frac{n}{2^{n+1}}}{1 + \frac{n+1}{2^{n+1}}} \rightarrow 1.$$

**Question 2.** (5pts) Soit  $(a_n)$  et  $(b_n)$  deux suites strictement positives telles que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ .

Montrer que si  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge, alors  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  converge.

**Solution.** Comme  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \infty$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ , on a  $\frac{a_n}{b_n} \geq 1$  (définition de tendre vers  $\infty$ , avec  $M = 1$ ). Ainsi, pour tout  $n \geq N$ , on a  $a_n \geq b_n$ . Comme la série  $\sum a_n$  converge par hypothèse, il suit, par le critère de comparaison, que  $\sum b_n$  converge.

**Question 3.** (10pts) Soit  $(a_n)$  une suite qui vérifie  $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Montrer que  $(a_n)$  est une suite de Cauchy.

*Indice.* Montrer d'abord que  $|a_{n+k} - a_n| \leq \sum_{\ell=n}^{n+k-1} \frac{1}{\sqrt{\ell^3+1}}$ .

**Solution.** On a, pour tout  $n, k \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} |a_{n+k} - a_n| &\leq |a_n - a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k-1} - a_{n+k}| && \text{(Inég. triang.)} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(n+k-1)^3+1}} \\ &= \sum_{\ell=n}^{n+k-1} \frac{1}{\sqrt{\ell^3+1}}. \end{aligned}$$

On pose  $s_n = \sum_{\ell=1}^n \frac{1}{\sqrt{\ell^3+1}}$ . Par le critère de Riemann, la série converge, donc  $(s_n)$  est une suite convergente. En particulier, c'est une suite de Cauchy. Ainsi, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$  et tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $|s_{n+k-1} - s_{n-1}| < \varepsilon$ . On voit que

$$|s_{n+k-1} - s_{n-1}| = s_{n+k-1} - s_{n-1} = \sum_{\ell=1}^{n+k-1} \frac{1}{\sqrt{\ell^3+1}} - \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{\ell^3+1}} = \sum_{\ell=n}^{n+k-1} \frac{1}{\sqrt{\ell^3+1}}.$$

Il suit que  $|a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$ , donc  $(a_n)$  est une suite de Cauchy.

**Question longue.**

**Question 4.** (20pts) Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+n2^k}$ .

- a) Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$  fixé, montrer que cette série converge.
- b) Montrer que  $a_n \leq \frac{2}{n}$ . Dédurre que  $a_n \rightarrow 0$ .
- c) Montrer que  $(na_n)$  est croissante. Dédurre qu'elle converge.
- d) On pose  $L := \lim_{n \rightarrow \infty} na_n$ . Montrer que  $L \geq \sum_{k=0}^m \frac{n}{1+n2^k}$  pour tout  $n, m \in \mathbb{N}$ . Dédurre que  $L = 2$ .
- e) En utilisant le fait que  $na_n \rightarrow 2$ , montrer que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ .

**Solution.** a) On a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+n2^k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n2^k} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{n} \cdot 2 = \frac{2}{n}.$$

Ainsi, les sommes partielles sont majorées, donc comme la série est à termes positifs, elle converge.

Il y a d'autres solutions possibles. On peut utiliser le critère du quotient avec  $b_k = \frac{1}{2^k}$ , par exemple.

b) L'inégalité a été montrée au a). Ensuite, on a  $0 \leq a_n \leq \frac{2}{n}$ , donc par le théorème des deux gendarmes, on conclut que  $a_n \rightarrow 0$ .

c) Pour  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  fixé, on considère  $c_n = \frac{n}{1+n2^k}$ . Montrons que  $c_n \leq c_{n+1}$ . On a

$$\begin{aligned} c_n \leq c_{n+1} &\iff \frac{n}{1+n2^k} \leq \frac{n+1}{1+(n+1)2^k} \\ &\iff n + n(n+1)2^k \leq (n+1)(1+n2^k) \\ &\iff n + n2^k + n^2 2^k \leq n + 1 + n2^k + n^2 2^k \\ &\iff 0 \leq 1. \end{aligned}$$

Comme la dernière inégalité est vraie, il suit que  $c_n \leq c_{n+1}$ , quelque soit  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  fixé. On a donc

$$na_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n}{1+n2^k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n+1}{1+(n+1)2^k} = (n+1)a_{n+1}.$$

D'où  $(na_n)$  est croissante.

On a montré au b) que  $na_n \leq 2$ , donc la suite est majorée. On conclut qu'elle converge.

d) Comme  $(na_n)$  est croissante, on sait que  $na_n \leq L$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . De plus, puisque la série est à termes positifs, si on enlève des termes, on obtient une quantité plus petite. On a donc

$$L \geq na_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n}{1+n2^k} \geq \sum_{k=0}^m \frac{n}{1+n2^k}$$

quelque soit  $m \in \mathbb{N}$ . On a donc

$$L \geq \sum_{k=0}^m \frac{n}{1+n2^k}. \quad (*)$$

Si on laisse  $n \rightarrow \infty$  dans  $(*)$ , on obtient

$$L \geq \sum_{k=0}^m \frac{1}{2^k},$$

car  $\frac{n}{1+n2^k} \rightarrow \frac{1}{2^k}$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Si on laisse  $m \rightarrow \infty$ , on obtient  $L \geq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$ .

Comme  $(na_n)$  est majoré par 2, on a également  $L \leq 2$ . On conclut que  $L = 2$ .

e) On sait que  $na_n = \frac{a_n}{1/n} \rightarrow 2$ , donc par le critère du quotient,  $\sum a_n$  diverge, puisque  $\sum \frac{1}{n}$  diverge par le critère de Riemann.