

Analyse 1

Université de Montréal — Département de mathématique

Examen intra 2

Enseignant : Jonathan Godin

Mercredi 9 juillet 2025

Session : E25

Aucun matériel permis. L'examen est sur 45 points et il dure 1h50 (110 minutes).
Justifiez toutes vos réponses.

Questions courtes.

Question 1. (10pts) Déterminer la nature des séries suivantes (absolument convergent, conditionnellement convergent ou divergent).

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{2^n + n}$

Question 2. (5pts) Soit (a_n) et (b_n) deux suites strictement positives telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$.

Montrer que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

Question 3. (10pts) Soit (a_n) une suite qui vérifie $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que (a_n) est une suite de Cauchy.

Indice. Montrer d'abord que $|a_{n+k} - a_n| \leq \sum_{\ell=n}^{n+k-1} \frac{1}{\sqrt{\ell^3+1}}$.

Question longue.

Question 4. (20pts) Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+n2^k}$.

- a) Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ fixé, montrer que cette série converge.
- b) Montrer que $a_n \leq \frac{2}{n}$. Dédire que $a_n \rightarrow 0$.
- c) Montrer que (na_n) est croissante. Dédire qu'elle converge.
- d) On pose $L := \lim_{n \rightarrow \infty} na_n$. Montrer que $L \geq \sum_{k=0}^m \frac{n}{1+n2^k}$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$. Dédire que $L = 2$.
- e) En utilisant le fait que $na_n \rightarrow 2$, montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.