

Analyse 1

Université de Montréal — Département de mathématique

Examen intra 1 (solutionnaire partiel)

Enseignant : Jonathan Godin

Mardi 2 juin 2026

Session : E26

Aucun matériel permis. L'examen est sur 40 points et il dure 1h50 (110 minutes).
Justifiez toutes vos réponses.

Rappel : la partie entière de $x \in \mathbb{R}$ est l'unique entier $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ tel que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Question 1. (8pts) Vrai ou faux. Si l'énoncé est vrai, le montrer. S'il est faux, trouver un contre-exemple.

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ et $B \subseteq \mathbb{R}$ des ensembles non vides tels que $A \setminus B$ est aussi non vide, où $A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A \mid a \notin B\}$. Si $\sup A$ existe, alors $\sup(A \setminus B)$ existe et $\sup(A \setminus B) \leq \sup A$.

Solution. Vrai. On sait que $A \setminus B \subseteq A$, donc tout majorant de A est aussi un majorant de $A \setminus B$. De plus, comme $A \setminus B$ est non vide, son supremum existe, par l'axiome de complétude. Enfin, comme $\sup A$ est un majorant de A , c'est aussi un majorant de $A \setminus B$, d'où $\sup(A \setminus B) \leq \sup A$.

Question 2. (6pts) Soit $A \subseteq (0, \infty)$ un sous-ensemble dénombrable. On pose

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A \text{ ou } -x \in A\}.$$

Montrer que E est dénombrable.

Solution. Comme A est dénombrable, on peut l'écrire comme une liste, disons $a_1, a_2, a_3, \dots$ où chaque élément de A apparaît une et une seule fois.

On peut faire une liste de E comme suit : $a_1, -a_1, a_2, -a_2, a_3, -a_3, \dots$. Ceci montre que E est dénombrable.

Question 3. (12pts) Soit $x, x_0, y, y_0 \in \mathbb{R}$ tels que

$$|x - x_0| < \min\left\{\frac{1}{2(|y_0| + 1)}, 1\right\} \quad \text{et} \quad |y - y_0| < \frac{1}{2(|x_0| + 1)}.$$

a) Montrer que

$$|xy - x_0y_0| \leq \frac{|x|}{2(|x_0| + 1)} + \frac{|y_0|}{2(|y_0| + 1)}.$$

b) Dédurre que $|xy - x_0y_0| < 1$.

Solution. a) On utilise l'inégalité triangulaire. On a

$$\begin{aligned}
 |xy - x_0y_0| &= |xy + (xy_0 - xy_0) - x_0y_0| \\
 &= |(xy - xy_0) + (xy_0 - x_0y_0)| \\
 &\leq |xy - xy_0| + |xy_0 - x_0y_0| \quad (\text{Inégalité triangulaire}) \\
 &= |x||y - y_0| + |y_0||x - x_0| \\
 &\leq \frac{|x|}{2(|x_0| + 1)} + \frac{|y_0|}{2(|y_0| + 1)}.
 \end{aligned}$$

b) Il est clair que $\frac{|y_0|}{2(|y_0| + 1)} < \frac{1}{2}$ quelque soit $y_0 \in \mathbb{R}$. Ensuite, on a

$$\begin{aligned}
 |x| &= |x - x_0 + x_0| \\
 &\leq |x - x_0| + |x_0| \\
 &< 1 + |x_0|.
 \end{aligned}$$

Il suit que $\frac{|x|}{2(|x_0| + 1)} < \frac{1}{2}$. En combinant avec l'inégalité obtenue au a), on obtient

$$|xy - x_0y_0| \leq \frac{|x|}{2(|x_0| + 1)} + \frac{|y_0|}{2(|y_0| + 1)} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Question 4. (14pts) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose

$$E = \left\{ \frac{\lfloor kx \rfloor}{k} \mid k \in \mathbb{N} \text{ et } \frac{\lfloor kx \rfloor}{k} < x \right\}.$$

a) Montrer que $\sup E$ existe si et seulement si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

b) Montrer que si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$x - \frac{1}{k} < \frac{\lfloor kx \rfloor}{k} \leq x.$$

c) Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, calculer $\sup E$.

Solution. a) Si $\sup E$ existe, alors E est non vide, donc il existe $a \in E$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = \frac{\lfloor kx \rfloor}{k} < x$. Autrement dit, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\lfloor kx \rfloor < kx$. Cela implique que x n'est pas un entier.

Réciproquement, si x n'est pas un entier, alors $\lfloor x \rfloor < x$, donc $\lfloor x \rfloor \in E$. Il est clair que E est majoré par x , donc par l'axiome de complétude, $\sup E$ existe.

b) On sait que $\lfloor kx \rfloor \leq kx < \lfloor kx \rfloor + 1$, donc $kx - 1 < \lfloor kx \rfloor$, c'est-à-dire $x - \frac{1}{k} < \frac{\lfloor kx \rfloor}{k}$.

De plus, comme $\lfloor kx \rfloor \leq kx$, on a bien $\frac{\lfloor kx \rfloor}{k} \leq x$.

c) On montre que le supremum de E est x .

Par définition de E , il est clair que x est un majorant de E .

Ensuite, soit M un majorant de E . Supposons que $M \leq x$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\frac{\lfloor kx \rfloor}{k} \leq M \leq x$. Par le b), il suit que $x - \frac{1}{k} < M \leq x$. Comme cela est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a bien $M = x$, d'où x est le supremum.

(Si on veut justifier un peu plus la dernière phrase, on peut supposé le contraire, c'est-à-dire que $M < x$. Dans ce cas, on a $0 < x - M < \frac{1}{k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc $k < \frac{1}{x-M}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Cela est impossible par la propriété d'Archimède.)