

Analyse 1

Université de Montréal — Département de mathématique

Examen intra 1

Enseignant : Jonathan Godin

Mardi 2 juin 2026

Session : E26

Aucun matériel permis. L'examen est sur 40 points et il dure 1h50 (110 minutes).
Justifiez toutes vos réponses.

Rappel : la partie entière de $x \in \mathbb{R}$ est l'unique entier $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ tel que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Question 1. (8pts) Vrai ou faux. Si l'énoncé est vrai, le montrer. S'il est faux, trouver un contre-exemple.

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ et $B \subseteq \mathbb{R}$ des ensembles non vides tels que $A \setminus B$ est aussi non vide, où $A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A \mid a \notin B\}$. Si $\sup A$ existe, alors $\sup(A \setminus B)$ existe et $\sup(A \setminus B) \leq \sup A$.

Question 2. (6pts) Soit $A \subseteq (0, \infty)$ un sous-ensemble dénombrable. On pose

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A \text{ ou } -x \in A\}.$$

Montrer que E est dénombrable.

Question 3. (12pts) Soit $x, x_0, y, y_0 \in \mathbb{R}$ tels que

$$|x - x_0| < \min\left\{\frac{1}{2(|y_0| + 1)}, 1\right\} \quad \text{et} \quad |y - y_0| < \frac{1}{2(|x_0| + 1)}.$$

a) Montrer que

$$|xy - x_0y_0| \leq \frac{|x|}{2(|x_0| + 1)} + \frac{|y_0|}{2(|y_0| + 1)}.$$

b) Dédurre que $|xy - x_0y_0| < 1$.

Question 4. (14pts) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose

$$E = \left\{ \frac{\lfloor kx \rfloor}{k} \mid k \in \mathbb{N} \text{ et } \frac{\lfloor kx \rfloor}{k} < x \right\}.$$

a) Montrer que $\sup E$ existe si et seulement si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

b) Montrer que si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$x - \frac{1}{k} < \frac{\lfloor kx \rfloor}{k} \leq x.$$

c) Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, calculer $\sup E$.