

Analyse 1

Université de Montréal — Département de mathématique

Examen final

Enseignant : Jonathan Godin

Mardi 12 août 2025

Session : E25

Aucun matériel permis. L'examen est sur 35 points et il dure 2h50 (170 minutes).
Justifiez toutes vos réponses.

Questions courtes.

Question 1. (4pts) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{-x}}{(x-1)^2-1}, & \text{si } x < 0, \\ 3-x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{x^2-1}{x-1}, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Déterminer les points où f est continue et les points où f est discontinue.

Question 2. (5pts) Soit $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction infiniment dérivable. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in [-1, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq C^{n+1} n!.$$

Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, si $|x| < \frac{1}{C}$, alors on a $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Question 3. (6pts) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ une fonction à valeurs positives deux fois dérivable en 0. On pose

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{f(x)}}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On suppose que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$. Montrer que g est continue en 0 si et seulement si $f''(0) = 0$.

Suite au verso

Questions longues.

Question 4. (10pts) Soit $f: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = L \in \mathbb{R}$.

- a) Trouver un exemple d'une telle fonction qui n'atteint pas son maximum.
- b) Montrer que s'il existe $a \in [0, 1)$ tel que $f(a) > L$, alors f atteint son maximum sur $[0, 1)$.

Question 5. (10pts) Soit $f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x \log(x + 1)$.

- a) Montrer que f' possède un unique zéro sur $(-1, \infty)$.
- b) Montrer que f possède un unique zéro sur $(-1, \infty)$.
- c) Tracer le graphe de f . (Indiquer clairement, le cas échéant, les zéros, les points critiques, les extrémums locaux/globaux, les points d'inflexion, les intervalles où f est croissante/décroissante, les intervalles où f est convexe/concave, les asymptotes, les comportements limites. Montrer ses calculs et ses raisonnements.)

Rappel pour le log : $\log(x) = 0 \iff x = 1, \quad (\log x)' = \frac{1}{x}$