

Analyse 1

Série 2

Suites

1. Convergence

Exercice 1. Trouver un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a :

$$\text{a) } \left| \frac{2n}{2n+3} - 1 \right| < \frac{1}{327} \qquad \text{b) } \left| \frac{n^2-2}{3n^2+4} - \frac{1}{3} \right| < \frac{1}{826}$$

Exercice 2. Pour chaque suite suivante, trouver un candidat $L \in \mathbb{R}$ et montrer que cette suite converge vers L en utilisant la définition de limite.

$$\text{a) } a_n = \frac{5n+8}{2n+3} \qquad \text{b) } a_n = \frac{n^2}{n^2+4} \qquad \text{c) } a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2}$$

Exercice 3. Déterminer si chacune des suites suivantes est bornée.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } a_n = (-1)^n n & \text{b) } a_n = 5^{1+(-1)^n} & \text{c) } a_n = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 \\ \text{d) } a_n = \frac{3n^2+7}{6n^2+5} & \text{e) } a_n = (n+1)^2 - (n^2+2n) & \end{array}$$

Exercice 4. a) Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ est bornée et divergente.

b) La suite dont le terme général est $b_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^{n+1})$ converge-t-elle ?

Exercice 5. On définit les suites (a_n) et (b_n) par

$$a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \qquad \text{et} \qquad b_n = a_n + \frac{1}{2n+1}.$$

a) Montrer que (a_n) est croissante et que (b_n) est décroissante.

b) Montrer qu'elles convergent toutes les deux.

Indice. Remarquez que $\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1}$ est positif quelque soit $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 6. Soit (a_n) une suite. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

1. (a_n) converge;
2. pour tout $M \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la suite (a_{n+M}) converge;
3. il existe $M \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tel que la suite (a_{n+M}) converge.

Montrer que dans ce cas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+M} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Exercice 7. Soit $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite. Montrer que si (a_n) est décroissante à partir du rang $M \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ et est minorée, alors (a_n) converge et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq M\}.$$

Exercice 8. Soit (a_n) et (b_n) deux suites qui convergent vers L . Montrer que la suite

$$(c_n) = (a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots)$$

converge aussi vers L .

Exercice 9. Soit (a_n) et (b_n) deux suites telles que $a_n \geq 0$ et $b_n \geq 0$. On définit la suite (c_n) par

$$(c_n) = (a_1, -b_1, a_2, -b_2, a_3, -b_3, \dots).$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur (a_n) et (b_n) qui permet de conclure que (c_n) converge.

Exercice 10. Soit (s_n) une suite. On pose

$$t_n = \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- a)† Montrer que si $s_n \rightarrow s$ lorsque $n \rightarrow \infty$, alors $t_n \rightarrow s$ lorsque $n \rightarrow \infty$.
- b) Trouver une suite (s_n) qui diverge, mais pour laquelle (t_n) converge.

Exercice 11. Soit (a_n) une suite.

- a) Montrer que si $a_n \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$, alors (a_n) est minorée. Dédurre que si $a_n \rightarrow -\infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$, alors (a_n) est majorée.
- b) Si $|a_n| \rightarrow \infty$, a-t-on nécessairement que $a_n \rightarrow \infty$ ou $a_n \rightarrow -\infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$?

Exercice 12. Pour chaque suite, déterminer si elle est bornée. Si elle n'est pas bornée, déterminer si elle tend vers ∞ , vers $-\infty$ ou ni l'un ni l'autre.

a) $\left(\frac{2^n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

b) $\left((-1)^n n\right)_{n \in \mathbb{N}}$

c) $\left(\frac{n^2 - \sqrt{n}}{\sqrt{1+n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

Exercice 13. Limite supérieure. Soit (a_n) une suite majorée. On définit la suite (b_n) par

$$b_n = \sup_{m \geq n} a_m := \sup\{a_m \mid m \in \mathbb{N}, m \geq n\}. \quad (*)$$

- a) Montrer que (b_n) est décroissante.
- b) Montrer que si $a_n \not\rightarrow -\infty$, alors (b_n) est minorée. Conclure que la suite converge dans ce cas.
- c) Montrer que si $a_n \rightarrow -\infty$, alors $b_n \rightarrow -\infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Définition. Dans les cas de b) et c), la suite (b_n) a une limite; on l'appelle *la limite supérieure* de a_n et on pose

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Si (a_n) n'est pas majorée, alors on pose $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \infty$. Dans tous les cas, la limite supérieure existe ou tend vers $+\infty$ ou tend vers $-\infty$.

- d) Montrer que si (a_n) est bornée, alors on a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \geq 1} \sup_{m \geq n} a_m \quad (**)$$

où on utilise la notation $\inf_{n \geq 1} c_n := \inf\{c_n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$ et celle de (*).

- e) Donner une définition pour la limite inférieure de (a_n) en s'inspirant de a), b) et c). Montrer que cette limite existe ou qu'elle tend vers $+\infty$ ou tend vers $-\infty$ et trouver une formule analogue à (**).

2. Calcul de limites

Exercice 14. Soit (a_n) une suite telle que $a_n \geq 0$ pour tout n et qui converge vers $a \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{a}$.

Exercice 15. Soit (a_n) et (b_n) deux suites.

- a) Trouver un exemple de (a_n) et (b_n) bornées telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ existe, mais (a_n) ou (b_n) divergent.
- b) Si $(a_n b_n)$ converge, alors (a_n) et (b_n) convergent-elles toutes les deux ?
- c) Si $(a_n b_n)$ et $(a_n + b_n)$ convergent, alors (a_n) et (b_n) convergent-elles toutes les deux ?

Exercice 16. Calculer la limite lorsque $n \rightarrow \infty$ des suites dont le terme général est donné par les expressions suivantes.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{n^3 - 1}{(n-1)(n^2 + n + 1)} & \text{b)} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{500} \\ \text{c)} \frac{3n^2 + 7\sqrt{n} + 3}{7n^2 + 2} & \text{d)} \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+12}} \\ \text{e)} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n} & \text{f)} \sqrt[n]{1 + n + n^2} \\ \text{g)} \sqrt{n^2 + n} - n & \text{h)} \frac{2^n}{n!} \end{array}$$

Exercice 17. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $0 < y \leq x$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x^n + y^n} = x$.

Exercice 18. Calculer les limites lorsque $n \rightarrow \infty$ des suites suivantes, si elles existent.

$$\text{a)} a_n = \sqrt[n]{1 + \sqrt[n]{2^n + n}} \quad \text{b)} a_n = \sqrt[n]{n} - \sqrt[2n]{n} \quad \text{c)} a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{2n-2}}$$

Exercice 19. Soit (a_n) et (b_n) les suites de l'exercice 5. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Exercice 20. Calculer la limite de la suite définie par $c_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

Exercice 21. Soit la suite

$$a_n = \frac{1}{n!} + \frac{2!}{n!} + \frac{3!}{n!} + \cdots + \frac{(n-1)!}{n!} + 1.$$

Calculer la limite de (a_n) , si elle existe.

Exercice 22. Calculer la limite de la suite (a_n) , dont le terme général est donné par

$$\begin{array}{lll} \text{a)} a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n & \text{b)} a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n & \text{c)* } a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \\ \text{d)} a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n} & \text{e)} a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}} & \text{f)} a_n = \left(1 + \frac{m}{n}\right)^{kn} \text{ où } m, k \in \mathbb{N}. \end{array}$$

Suggestion pour le c). Considérez d'abord $(a_n)^n$.

Exercice 23. Pour quels valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la suite

$$s_n = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \cdots + \frac{x^n}{2^n}$$

converge-t-elle ? Lorsqu'elle converge, déterminer la valeur de la limite.

3. Sous-suites, suites de Cauchy et suites récurrentes

a) $a_n = (-1)^n n$ b) $a_n = \left(\frac{1}{n} - 1\right)^n$ c) $a_n = \left|\frac{n}{2n}\right|$

Exercice 27. Soit la suite dont le terme général est $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$. Montrer par récurrence que $a_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$. Dédurre que (a_n) diverge.

Exercice 29. Soit $a_1 = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $a_{n+1} = \frac{2a_n+3}{6}$.

b) Calculer la limite.

$$s_{n+1} := \sqrt{2 + \sqrt{s_n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 31. Soit (a_n) la suite définie par $a_1 = 2$ et $a_{n+1} = 2a_n^2$ ($n \in \mathbb{N}$).

a) Montrer que si a_n converge vers L , alors soit $L = 0$ ou $L = \frac{1}{2}$.

b) La suite converge-t-elle ?

a) $a_n = \frac{n+2}{n}$ est une suite de Cauchy;

b) $a_n = (-1)^n$ n'est pas une suite de Cauchy.

$$|a_{n+k} - a_n| \leq |b_n|,$$

5

Exercice 34. Soit (a_n) et (b_n) deux suites telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$|a_{n+1} - a_n| \leq b_n.$$

- a) Soit $s_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. On suppose que (s_n) converge. Montrer que (a_n) est une suite de Cauchy.
- b) Si on a plutôt que $b_n \rightarrow 0$, alors (a_n) est-elle une suite de Cauchy ?

Exercice 35. Soit (a_n) une suite. On suppose qu'il existe $\ell \in (0, \infty)$ tel que pour tout $n \geq 2$, on ait

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \ell |a_n - a_{n-1}|.$$

- a) Montrer que $|a_{n+1} - a_n| \leq \ell^{n-1} |a_2 - a_1|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$|a_{n+k} - a_n| \leq |a_2 - a_1| \ell^{n-1} \frac{1 - \ell^k}{1 - \ell}.$$

- c) Montrer que si $\ell < 1$, alors (a_n) est une suite de Cauchy.

Exercice 36. Soit (a_n) la suite définie par

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n^3 + a_n^2, & \text{si } n \geq 2; \\ a_1 = -\frac{1}{8}. \end{cases}$$

- a) Montrer que $|a_n| \leq \frac{1}{4}$ pour tout n .
- b) Montrer que $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{11}{16} |a_n - a_{n-1}|$.
- c) Conclure que a_n est une suite de Cauchy. Quelle est la limite ?

Exercice 37. On pose $a_1 = 2$ et $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

- a) Montrer que a_n est un nombre rationnel pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- b) Montrer que $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2} |a_n - a_{n-1}|$ pour tout entier $n \geq 2$. Dédurre que (a_n) est Cauchy.
Indice. Montrez d'abord que $1 \leq a_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- c) Montrer que la limite de (a_n) n'est pas un nombre rationnel.

Morale : les suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ ne convergent pas nécessairement dans $\mathbb{Q}$.

4. Autre

Exercice 38. Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble. Montrer que $x \in \mathbb{R}$ est un point limite de E si et seulement s'il existe une suite (a_n) dans $E \setminus \{x\}$ telle que $a_n \rightarrow x$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Remarque. Ceci justifie l'appellation « point limite ».

Exercice 39. Soit (a_n) une suite. On appelle $x \in \mathbb{R}$ un *point d'accumulation* de (a_n) s'il existe une sous-suite (a_{n_k}) telle que $a_{n_k} \rightarrow x$ lorsque $k \rightarrow \infty$. Montrer que (a_n) possède un unique point d'accumulation si et seulement si elle converge.

Exercice 40. Propriétés des limites inférieures et supérieures. Soit (a_n) une suite. Montrer les propriétés suivantes de $\limsup$ et $\liminf$. (Voir l'exercice 13 au besoin.)

- a) $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ b) $\limsup_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = -\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$
- c) $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ d) $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

e) Les énoncés suivants sont équivalents :

- i) $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$;
ii) il existe une sous-suite (a_{n_k}) telle que $a_{n_k} \rightarrow \infty$ lorsque $k \rightarrow \infty$;
iii) (a_n) n'est pas majorée.

Déduire l'analogie pour la limite inférieure.

f) Soit (a_{n_k}) une sous-suite de (a_n) qui converge vers L . Montrer que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq L \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

g)[†] Montrer qu'il existe une sous-suite (a_{n_k}) telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Déduire le résultat analogue pour la limite inférieure.

Suggestion. Vous pouvez construire une sous-suite à l'aide du principe du bon ordre et de la suite (b_n) de l'exercice 13.

h) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ si et seulement si $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

Suggestion. Pour la réciproque, les cas où la limite inférieure et la limite supérieure sont $\pm\infty$ sont déjà faits au c) et au d). Pour le cas où elles sont finies, utilisez l'exercice 28.

Exercice 41[†]. Représentation décimale. Soit $x \in [0, \infty)$. Le but de l'exercice est d'associer une représentation décimale à x . Pour $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, on pose

$$s_n := \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}, \quad a_{n+1} := 10^{n+1}(s_{n+1} - s_n)$$

et $a_0 = s_0$.

- a) Montrer que $a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ pour $n \geq 1$.
- b) Montrer que s_n s'écrit sous la forme

$$s_n = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{10^k}.$$

Indice. Utilisez le principe de récurrence.

- c) Montrer que (s_n) est croissante et majorée par x . Dédurre que (s_n) est convergente.
- d) On définit une troisième suite : on pose

$$t_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}.$$

Montrer que (t_n) est décroissante et minorée par x .

- e) Montrer que $t_n - s_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.
- f) Dédurre que $s_n \rightarrow x$ et donc que

$$x = \sup \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{10^k} \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}.$$

Remarque. On sait que certains nombres ont plus d'une représentations décimales possibles. Cette façon de procéder en donne une, celle qui ne devient pas tôt ou tard une suite constante de 9. Par exemple, cette façon de procéder donne la représentation décimale 1 au nombre un et non $0,999999 \dots$