

Analyse 1

Été 2025

À quoi s'attendre

- ① Le cours a la réputation d'être assez difficile
 - Beaucoup de matière
 - Plus abstrait
 - Plus de rigueur
- ② **On ne s'y prépare pas comme à un cours de calcul.** Il n'y a pas de formule magique. Pour chaque question, il faut
 - réfléchir à une idée ;
 - mettre en œuvre cette idée à l'aide d'arguments logiques.
- ③ Chaque problème est différent ! Mais avec la pratique, on retrouve des motifs qui se répètent.

Témoignages communs

« J'ai **fait** tous les exercices, mais l'examen a mal été »

« J'ai **compris** les exercices/la matière, mais l'examen a mal été »

- Même si on pense *comprendre*, est-ce vraiment le cas ?

Erreurs à éviter

« J'ai regardé la solution et j'ai compris. »

« L'exercice est facile, on a juste à faire ça [...] »

- ❶ Avant de résoudre le problème.
 - Bien comprendre ce que la question demande.
 - Si possible, interpréter la question à l'aide d'exemples et/ou de dessins.
 - Voir la nécessité des hypothèses ; essayer de comprendre ce qui ne marche pas si on suppose l'opposé de l'hypothèse.
- ❷ Pendant la résolution du problème.
 - Il n'y a pas de formule magique.
 - Essai-erreur ;
 - Essayer les techniques « classiques » (« méta-truc »)
- ❸ Après la résolution du problème.
 - Bien rédiger rigoureusement sa solution.
 - Réfléchir aux éléments importants qui interviennent.

Exemple

Exercice 26. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$.

Exemple

Exercice 26. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$.

Solution. On pose $E = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\}$. Cet ensemble est majoré par x . Si $x \geq 0$, alors E est non vide puisque $0 \in E$. Si $x < 0$, alors $-x > 0$. Par le principe d'Archimède, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $p > -x$ et donc $-p < x$. Ainsi, E est non vide puisque $-p \in E$. Par l'axiome de complétude, $\sup E$ existe. On pose $n = \sup E$.

On montre maintenant que $n \in \mathbb{Z}$. Puisque $n - \frac{1}{2}$ n'est pas un majorant, il existe $a \in E$ tel que $n - \frac{1}{2} < a \leq n$. En particulier, a est un entier et c'est l'unique entier de l'intervalle $[n - \frac{1}{2}, n]$. Ainsi, il suit que a est un majorant de E , car pour tout $x \in E$, on a soit $x \leq n - \frac{1}{2}$, soit $n - \frac{1}{2} < x \leq n$. Dans le premier cas, on a $x < a$ et dans le deuxième cas, on a $x = a$. En combinant les deux cas, on conclut que pour tout $x \in E$, on a $x \leq a$, d'où a est un majorant de E . Puisque n est le plus petit majorant, on a $a = n$, d'où n est un entier.

Enfin, on a bien $n \leq x < n+1$. En effet, on a $n \leq x$ puisque $n \in E$. On a $n+1 > x$, car sinon, $n+1$ serait un élément de E plus grand que le supremum.

Pour l'unicité, on suppose qu'il existe $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $m \leq x < m+1$ et $n \leq x < n+1$. Il suit que $-n-1 < -x \leq -n$ et donc $m-n-1 < 0 < m-n+1$. En additionnant $-m+n$ partout, on obtient $-1 < n-m < 1$. Le seul entier dans l'intervalle $(-1, 1)$ est 0 et comme $n-m$ est un entier, on déduit que $n-m=0$.

Deux grands obstacles

Rédaction et rigueur

- Phrases complètes
- **Cohérence**
- Enchaînements des idées/fil conducteur
- Mettre de l'avant les éléments importants

Outils de base

Logique

$$A \Rightarrow B$$

$$\neg B \Rightarrow \neg A$$

$$A \wedge \neg B$$

Techniques de preuve

Direct

Contraposée

Absurde

Important

Lorsque vous faites des exercices, il est important de prendre la peine d'écrire votre démarche au propre, de façon structurée.

Exemple

Exercice. Soit p un nombre premier et $a, b \in \mathbb{N}$. Montrer que si $p|ab$, alors $p|a$ ou $p|b$.

$$(a, p) = 1 \Rightarrow ax + py = 1$$

$$abx + pyb = b$$

$$\text{donc } p|b$$

Soit $d = \text{pgcd}(a, p)$.

Alors $d|p \Rightarrow d = kp$ ou 1
car p est premier.

On considère ces deux cas.

• $d = 1$: il existe $x, y \in \mathbb{Z}$
tels que $ax + py = 1$
[...] donc $p|b$.

• $d = kp$: comme $d|a$, on
a bien $p|a$.

Dans tous les cas, on
a montré que $p|a$ ou $p|b$.

Pourquoi faire le cours d'analyse 1

- ① Cours obligatoire ;
- ② Utile pour d'autres cours de math.

Compétences transversales

- Raisonnement logique ;
- Organiser sa pensée ;
- Rigueur ;
- Communication d'idées abstraites.