

Chapitre 4

Fonctions continues

4.1. Limites de fonctions

Définition 4.1.1. Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ et $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1) D est le *domaine* de f .

Si D n'est pas donné, alors on pose $D := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ est définie}\}$.

2) $f(D) := \{f(x) \mid x \in D\}$ est l'*image* de f .

Définition 4.1.2. On dit que $I \subseteq \mathbb{R}$ est un *intervalle* si pour tout $x, y \in I$, pour tout $z \in \mathbb{R}$, $x < z < y \Rightarrow z \in I$.

Définition 4.1.3. Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{D}$. On dit que $f(x)$ *tend vers* L lorsque x *tend vers* a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

On écrit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ou $f(x) \rightarrow L$ ($x \rightarrow a$).

Théorème 4.1.4. Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{D}$. Alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ si et seulement si pour toute suite (x_n) dans $D \setminus \{a\}$ telle que $x_n \rightarrow a$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$.

Théorème 4.1.5. Soit $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions. Si $f(x) \rightarrow L$ et $g(x) \rightarrow M$ lorsque $x \rightarrow a$, alors

1) $|f(x)| \rightarrow |L|$

2) $f(x) + g(x) \rightarrow L + M$

3) $f(x)g(x) \rightarrow LM$

4) $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{L}{M}$ si $M \neq 0$

5) si $f(x) \leq g(x)$, alors $L \leq M$

6) $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt[n]{f(x)} \rightarrow \sqrt[n]{L}$ si $f(x) \geq 0$

lorsque $x \rightarrow a$.

Corollaire 4.1.6. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$, où P, Q sont des polynômes et $Q(a) \neq 0$.

Extension de la notion de limite.

Définition 4.1.7. Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

- 1) Limite à droite : on pose $E := D \cap (a, \infty)$ et $g := f|_E$. Si $a \in \overline{E}$, alors $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) := \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. De façon équivalente

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Limite à gauche : on pose $E := D \cap (-\infty, a)$ et $g := f|_E$. Si $a \in \overline{E}$, alors $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) := \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. De façon équivalente

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, -\delta < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

- 2) Limite infinie : si $a \in \overline{D}$, on dit que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ (resp $-\infty$) si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in D, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) \geq M \quad (\text{resp. } \leq M).$$

- 3) Limite à l'infini : S'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $(a, \infty) \subseteq D$, alors on dit que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in D, x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

S'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $(-\infty, a) \subseteq D$, alors on dit que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in D, x < M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Remarque. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$

4.2. Fonctions continues en un point

Définition 4.2.1. Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

- 1) f est *continue en* $a \in D$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
- 2) f est *discontinue en* a si elle n'est pas continue en a .
- 3) f est *continue sur* D (ou simplement *continue*) si pour tout $a \in D$, elle est continue en a .

Proposition 4.2.2. Les énoncés suivants sont équivalents.

- 1) f est continue en a
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
- 3) pour toute suite (x_n) dans D , si $x_n \rightarrow a$, alors $f(x_n) \rightarrow f(a)$.

Proposition 4.2.3. Si $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues en $a \in D$, alors $|f|$, $f + g$, fg , f/g (si $g(a) \neq 0$) et $\sqrt[n]{f}$ (si $f \geq 0$) sont continues en a .

Proposition 4.2.4. Si $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $a \in D$ et $g: f(D) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $f(a) \in f(D)$, alors $g \circ f$ est continue en a .

4.3. Fonctions continues sur un intervalle

Théorème (des valeurs intermédiaire) (TVI) **4.3.1.** Soit I un intervalle et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $a, b \in I$, si $f(a) < f(b)$, alors pour tout c tel que $f(a) < c < f(b)$, il existe x entre a et b tel que $f(x) = c$.

Définition 4.3.2. On dit que $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ est majorée/minorée/bornée si $f(D)$ est majorée/minorée/bornée.

Théorème 4.3.3. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$. Alors f est bornée.

Théorème 4.3.4. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$. Alors il existe $c, d \in [a, b]$ tels que $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ pour tout $x \in [a, b]$.

Théorème 4.3.5. Soit I un intervalle et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

- 1) $J := f(I)$ est un intervalle;
- 2) $f: I \rightarrow J$ est inversible ssi f est strictement monotone;
- 3) si 2) tient, alors f^{-1} est continue.

Exemple 4.3.1. Comme $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ est strictement croissante (exercice série 3) et continue (exercice série 4), alors elle est inversible. Son inverse est la fonction logarithme naturelle $\log: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, qui est également continue et strictement monotone, par le théorème précédent.

On peut voir qu'elle est, en fait, strictement croissante simplement par le fait que pour $x < y$, si $\log(x) \geq \log(y)$, alors $e^{\log x} \geq e^{\log y}$, c'est-à-dire $x \geq y$, qui est une contradiction.