

Chapitre 3

Séries

3.1. Notions de base

Définition 3.1.1. 1) Étant donné une suite (a_n) , la *série* s de terme général a_n est l'expression

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

2) On pose $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$. On appelle (s_n) la *suite des sommes partielles* de s .

3) Si (s_n) converge, alors on dit que la série s *converge* et on écrit

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k.$$

Si (s_n) diverge, alors on dit que s diverge.

Théorème 3.1.2. (Condition nécessaire) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Théorème 3.1.3. Soit $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ deux séries convergentes. Alors pour tout $c, d \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (ca_n + db_n) = cs + dt.$$

Théorème 3.1.4. (Queue de la série) Soit $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $t = \sum_{n=N}^{\infty} a_n$. Alors s et t sont de même nature.

Théorème 3.1.5. (Regroupements) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=i_n}^{i_{n+1}-1} a_j$ converge vers $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, où $i_n \in \mathbb{N}$ et $1 = i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < \cdots$.

3.2. Séries à termes positifs

Définition 3.2.1. Une série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est dite à *termes positifs* si $a_n \geq 0$ pour tout n .

Théorème 3.2.2. (Critère de comparaison) Supposons que $0 \leq a_n \leq b_n$ pour tout n . Alors

- 1) si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge;
- 2) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

Théorème 3.2.3. (Critère de condensation de Cauchy) Soit (a_n) une suite positive et décroissante. Alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ sont de même nature.

Exemple 3.2.1. La série de Riemann. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge ssi $p > 1$.

Théorème 3.2.4. (Critère du quotient) Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ des séries à termes positifs. Si $b_n \neq 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L \neq 0, \infty$, alors les deux séries sont de même nature.

Théorème 3.2.5. (Critère de d'Alembert) Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série où $a_n > 0$. Supposons que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in [0, \infty]$. Alors

- 1) si $L < 1$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge;
- 2) si $L > 1$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Théorème 3.2.6. (Critère de la racine de Cauchy) Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, une série à termes positifs. Supposons que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L \in [0, \infty]$. Alors

- 1) si $L < 1$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge;
- 2) si $L > 1$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

3.3. Séries alternées

Définition 3.3.1. Une série est *alternée* si elle est de la forme $\sum_{n=N}^{\infty} (-1)^n a_n$, où $N \in \mathbb{Z}$ et $a_n \geq 0$.

Théorème 3.3.2. (Critère de Leibniz) Soit $s = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ une série alternée. Si $a_n \downarrow 0$, alors

- 1) s converge et
- 2) $|s - s_n| \leq a_{n+1}$, où $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$.

3.4. Convergence absolue

Définition 3.4.1. Une série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est dite

- 1) *absolument convergente* (AC) si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge;
- 2) *conditionnellement convergente* (CC) si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge et $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge;

Théorème 3.4.2. Si une série est absolument convergente, alors elle converge.

Définition 3.4.3. Un *réarrangement* de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est une série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ telle que $b_n = a_{f(n)}$, où $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une bijection.

Théorème 3.4.4. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est AC, alors tout réarrangement est AC et converge vers la même limite.

Théorème 3.4.5. (Riemann, facultatif) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est CC, alors pour tout $r \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, il existe un réarrangement $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tel que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = r$.

Théorème 3.4.6. (Produit de Cauchy) Soit $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et $t = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ deux séries. On pose

$$p = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

- 1) Si s est AC et t est convergente, alors p converge et $p = st$.
- 2) Si t est, de plus, AC, alors p est AC.

3.5. Séries entières

Définition 3.5.1. Une *série entière* est une série de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, où $a_n, x \in \mathbb{R}$.

Théorème 3.5.2. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière. Il existe un unique nombre $R \in [0, \infty]$ tel que

- 1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est AC si $|x| < R$ et
- 2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est divergente si $|x| > R$.

R est le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et $(-R, R)$, son intervalle de convergence.

Définition 3.5.3. On définit la *fonction exponentielle* $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ par

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Remarque. On a $\exp(1) = e$ et, pour tout $q \in \mathbb{Q}$, on a $\exp(q) = e^q$ (exercice série 3). On écrit $\exp(x) =: e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
