

Chapitre 2

Suites

2.1. Convergence

a) Convergence.

Définition 2.1.1. Une *suite* est une fonction $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Le *terme de rang* n (ou terme général) de la suite est $a_n := a(n)$.

On écrit $a = (a_1, a_2, a_3, \dots) = (a_n) = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_n)_{n=1}^\infty$.

Définition 2.1.2. 1) (a_n) est *majorée* (resp. *minorée*, *bornée*) si $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est majoré (resp. minoré, borné).

2) (a_n) est (*strictement*) *croissante* si $(a_{n+1} > a_n)$ $a_{n+1} \geq a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) (a_n) est (*strictement*) *décroissante* si $(a_{n+1} < a_n)$ $a_{n+1} \leq a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) (a_n) est *monotone* si elle est croissante ou décroissante.

Définition 2.1.3. Une suite (a_n) est dite *convergente* s'il existe un nombre $L \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ pour lequel $|a_n - L| < \varepsilon$ dès que $n \geq N$.

On dit que L est la *limite* de (a_n) et on écrit $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ou $a_n \rightarrow L$ (lorsque $n \rightarrow \infty$).

Si (a_n) n'est pas convergente, alors elle est *divergente*.

b) Résultats de base.

Théorème 2.1.4. Si (a_n) est convergente, alors sa limite est unique.

Théorème 2.1.5. Si (a_n) est convergente, alors (a_n) est bornée.

Théorème 2.1.6. Si (a_n) est croissante et majorée, alors (a_n) est convergente et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n =: L.$$

On écrit $a_n \uparrow L$.

Résultat analogue si (a_n) est décroissante et minorée.

Théorème 2.1.7. Pour tout $M \in \mathbb{N}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+M-1}.$$

c) Limites infinies.

Définition 2.1.8. On dit qu'une suite (a_n) *tend vers* ∞ (ou *diverge vers* ∞) si pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $a_n \geq M$.

Pour $-\infty$: $a_n \leq M$.

2.2. Calcul des limites

Théorème 2.2.1. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, où $a, b \in \mathbb{R}$, alors

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$
- 4) si $b_n \neq 0$ et $b \neq 0$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$
- 5) si $a_n \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $a \leq b$
- 6) si $a_n \geq 0$, et $p \in \mathbb{N}$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{a}$

Théorème 2.2.2. (des deux gendarmes). Soit $(a_n), (b_n), (c_n)$ des suites telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$ et $a_n \leq b_n \leq c_n$ pour tout $n \geq N$. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$.

Corollaire 2.2.3. Si $|a_n| \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, alors $a_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Théorème 2.2.4. Si $a_n \rightarrow \infty$ et $b_n \geq a_n$ pour tout $n \geq N$, alors $b_n \rightarrow \infty$.

Progression géométrique.

Définition 2.2.5. Une *progression géométrique* de raison $q \neq 1$ est une suite de la forme $(a, aq, aq^2, aq^3, \dots) = (aq^{n-1})_{n \in \mathbb{N}}$.

Théorème 2.2.6. 1. $|q| > 1 \Rightarrow |q|^n \rightarrow \infty$.

2. $|q| < 1 \Rightarrow |q|^n \rightarrow 0$.

Théorème 2.2.7. Soit $q \neq 1$. On pose $s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$.

- 1) $s_n = \frac{1-q^n}{1-q}$
- 2) Si $|q| < 1$, alors $s_n \rightarrow \frac{1}{1-q}$.
- 3) Si $|q| > 1$, alors (s_n) diverge et $|s_n| \rightarrow \infty$.

Racine n -ième.

Théorème 2.2.8. 1) $n^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$
2) Si $a > 0$, alors $a^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$.

Le nombre e .

Proposition 2.2.9. 1) On pose $s_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$. Alors (s_n) converge et on pose $e := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$.

2) On pose $t_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$. Alors (t_n) est strictement croissante et $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = e$.

2.3. Sous-suites, suites de Cauchy et suites récurrentes

Définition 2.3.1. Soit (a_n) et (b_k) deux suites. On dit que (b_k) est une *sous-suite* de (a_n) s'il existe des entiers $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ tels que $b_k = a_{n_k}$.

Proposition 2.3.2. $a_n \rightarrow L$ ssi toutes les sous-suites de (a_n) convergent vers L .

Théorème 2.3.3. (de Bolzano-Weierstrass). Toute suite bornée possède une sous-suite convergente.

Définition 2.3.4. On dit que (a_n) est une *suite de Cauchy* (parfois suite fondamentale) si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N, |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Théorème 2.3.5. Une suite est de Cauchy ssi elle est convergente.