Analyse 1

Université de Montréal — Département de mathématique

Examen intra 2 (solutionnaire partiel)

Enseignant : Jonathan Godin — Mercredi 9 juillet 2025

Session : E25

Aucun matériel permis. L'examen est sur 45 points et il dure 1h50 (110 minutes). **Justifiez toutes vos réponses.**

Questions courtes.

Question 1. (10pts) Déterminer la nature des séries suivantes (absolument convergent, conditionnellement convergent ou divergent).

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{2^n+n}$

Solution. a) La série diverge. Voici deux façons de le faire.

1. On pose $s_n = \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$. On a alors

$$\begin{aligned} s_n &= (\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \\ &= \sqrt{n+1}-\sqrt{1}. \end{aligned}$$

On voit que $s_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$.

2. On a

$$\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

À partir de là, on peut déduire que la série diverge de différentes façons. En voici une. On a

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \geq \frac{2}{\sqrt{n+1}}$$

comme $\sum \frac{2}{\sqrt{n+1}}$ diverge par le critère de Riemann, la série de départ diverge par le critère de comparaison.

b) La série diverge. En effet, on a

$$\frac{2^n}{2^n+n} = \frac{1}{1+\frac{n}{2^n}} \to \frac{1}{1+0} = 1$$

lorsque $n \to \infty$. Il suit que $(-1)^n\frac{2^n}{2^n+n} \not\to 0$ lorsque $n \to \infty$, donc la série diverge.

Remarques : 1. Comme la série diverge, elle n'est ni absolument convergente, ni conditionnellement convergente, donc il n'y a rien d'autre à montrer. (En particulier, le critère de Leibniz est inutile, ici.)

2. On peut montrer que $\frac{n}{2^n} \to 0$ comme suit : on a $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} \geq 1+n+\frac{n(n+1)}{2}$. Il suit que
$$\frac{n}{2^n} \leq \frac{n}{1+n+\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{n}+1+\frac{n+1}{2}} \to 0.$$

3. Le critère de la racine de Cauchy et le critère de d'Alembert ne permettent pas de déterminer la convergence ou la divergence de la série. En effet, on a
$$\sqrt[n]{\frac{2^n}{2^n+n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{1+\frac{n}{2^n}}} \to 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}+n+1}}{\frac{2^n}{2^n+n}} = 2\frac{2^n+n}{2^{n+1}+n+1} = \frac{2}{2}\frac{\frac{1}{2}+\frac{n}{2^{n+1}}}{1+\frac{n+1}{2^{n+1}}} \to 1.$$

Question 2. (5pts) Soit (a_n) et (b_n) deux suites strictement positives telles que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$. Montrer que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

Solution. Comme $\frac{a_n}{b_n} \to \infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $\frac{a_n}{b_n} \geq 1$ (définition de tendre vers ∞, avec $M = 1$). Ainsi, pour tout $n \geq N$, on a $a_n \geq b_n$. Comme la série $\sum a_n$ converge par hypothèse, il suit, par le critère de comparaison, que $\sum b_n$ converge.

Question 3. (10pts) Soit (a_n) une suite qui vérifie $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (a_n) est une suite de Cauchy.

Indice. Montrer d'abord que $|a_{n+k} - a_n| \leq \sum_{\ell=n}^{n+k-1} \frac{1}{\sqrt{\ell^3+1}}$.

Solution. On a, pour tout $n, k \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} |a_{n+k} - a_n| &\leq |a_n - a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k-1} - a_{n+k}| && \text{(Inég. triang.)} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(n+k-1)^3+1}} \\ &= \sum_{\ell=n}^{n+k-1} \frac{1}{\sqrt{\ell^3+1}}. \end{aligned}$$

On pose $s_n = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\ell^3+1}}$. Par le critère de Riemann, la série converge, donc (s_n) est une suite convergente. En particulier, c'est une suite de Cauchy. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe

$N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on a $|s_{n+k-1} - s_{n-1}| < \varepsilon$. On voit que

$$|s_{n+k-1} - s_{n-1}| = s_{n+k-1} - s_{n-1} = \sum_{\ell=1}^{n+k-1} \frac{1}{\sqrt{\ell^3+1}} - \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{\ell^3+1}} = \sum_{\ell=n}^{n+k-1} \frac{1}{\sqrt{\ell^3+1}}.$$

Il suit que $|a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$, donc (a_n) est une suite de Cauchy.

Question longue.

Question 4. (20pts) Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+n2^k}$.

a) Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ fixé, montrer que cette série converge.

b) Montrer que $a_n \leq \frac{2}{n}$. Déduire que $a_n \to 0$.

c) Montrer que (na_n) est croissante. Déduire qu'elle converge.

d) On pose $L := \lim_{n\to\infty} na_n$. Montrer que $L \geq \sum_{k=0}^{m} \frac{n}{1+n2^k}$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$. Déduire que $L = 2$.

e) En utilisant le fait que $na_n \to 2$, montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Solution. a) On a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+n2^k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n2^k} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{n} \cdot 2 = \frac{2}{n}.$$

Ainsi, les sommes partielles sont majorées, donc comme la série est à termes positifs, elle converge.

Il y a d'autres solutions possibles. On peut utiliser le critère du quotient avec $b_k = \frac{1}{2^k}$, par exemple.

b) L'inégalité a été montrée au a). Ensuite, on a $0 \leq a_n \leq \frac{2}{n}$, donc par le théorème des deux gendarmes, on conclut que $a_n \to 0$.

c) Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ fixé, on considère $c_n = \frac{n}{1+n2^k}$. Montrons que $c_n \leq c_{n+1}$. On a

$$\begin{aligned} c_n \leq c_{n+1} &\iff \frac{n}{1+n2^k} \leq \frac{n+1}{1+(n+1)2^k} \\ &\iff n + n(n+1)2^k \leq (n+1)(1+n2^k) \\ &\iff n + n2^k + n^2 2^k \leq n + 1 + n2^k + n^2 2^k \\ &\iff 0 \leq 1. \end{aligned}$$

Comme la dernière inégalité est vraie, il suit que $c_n \leq c_{n+1}$, quelque soit $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ fixé. On a donc

$$na_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n}{1+n2^k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n+1}{1+(n+1)2^k} = (n+1)a_{n+1}.$$

D'où (na_n) est croissante.

On a montré au b) que $na_n \leq 2$, donc la suite est majorée. On conclut qu'elle converge.

d) Comme (na_n) est croissante, on sait que $na_n \leq L$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, puisque la série est à termes positifs, si on enlève des termes, on obtient une quantité plus petite. On a donc

$$L \geq na_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n}{1+n2^k} \geq \sum_{k=0}^{m} \frac{n}{1+n2^k}$$

quelque soit $m \in \mathbb{N}$. On a donc

$$L \geq \sum_{k=0}^{m} \frac{n}{1+n2^k}. \qquad (*)$$

Si on laisse $n \to \infty$ dans $(*)$, on obtient

$$L \geq \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{2^k},$$

car $\frac{n}{1+n2^k} \to \frac{1}{2^k}$ lorsque $n \to \infty$. Si on laisse $m \to \infty$, on obtient $L \geq \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$.

Comme (na_n) est majoré par 2, on a également $L \leq 2$. On conclut que $L = 2$.

e) On sait que $na_n = \frac{a_n}{1/n} \to 2$, donc par le critère du quotient, $\sum a_n$ diverge, puisque $\sum \frac{1}{n}$ diverge par le critère de Riemann.