

Analyse 1

Université de Montréal — Département de mathématique

Examen intra 1 (solutionnaire partiel)

Enseignant : Jonathan Godin

Mercredi 4 juin 2025

Session : E25

Aucun matériel permis. L'examen est sur 25 points et il dure 1h50 (110 minutes).
Justifiez toutes vos réponses.

Rappel : la partie entière de $x \in \mathbb{R}$ est l'unique entier $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ tel que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Question 1. (6pts) Vrai ou faux. Répondez à 2 questions parmi A, B et C. Vous pouvez faire la question exclue pour un bonus tout-ou-rien de 1 points. **Indiquez clairement** laquelle est faite en bonus. **Justifiez vos réponses.** (Vous ne pouvez pas faire appel au résultat d'un exercice.)

A. Soit $E = (0, 2) \cup \{3\}$. Le point $x = 3$ est un point limite de E .

B. Si $x \geq 2$, alors l'inégalité $\frac{x^2 - x + 1}{x + 1} \geq \frac{1}{2}$ est vérifiée.

C. L'ensemble $A = \left\{ \frac{k}{2^n - 1} \mid n, k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n \text{ et } k \text{ impair} \right\}$ est dénombrable.

Solution. A. Faux. On voit que $\dot{B}(x, 1) \cap E = \emptyset$, donc x n'est pas un point limite de E .

B. Vrai. On a $x \geq 2 \Rightarrow x^2 \geq 2x$, donc

$$\frac{x^2 - x + 1}{x + 1} \geq \frac{2x - x + 1}{x + 1} = 1 > \frac{1}{2}.$$

C. Vrai. On peut faire le tableau

$$\begin{array}{ccc} 1 & & \\ \frac{1}{3} & & \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \\ \frac{1}{15} & \frac{3}{15} & \\ \frac{1}{31} & \frac{3}{31} & \frac{5}{31} \\ \vdots & & \end{array}$$

Ensuite, on fait une liste en prenant les diagonales, comme on a fait en classe avec les rationnels. Il n'y a pas de répétition.

Questions courtes.

Question 2. (5pts) Montrer que si $E \subseteq \mathbb{R}$ est fermé et $\sup E$ existe, alors $\sup E \in E$.

Solution. Supposons le contraire, c'est-à-dire que $\sup E \in \mathbb{R} \setminus E$. Comme E est fermé, $\mathbb{R} \setminus E$ est ouvert, donc il existe $r > 0$ tel que $B(\sup E, r) \subseteq \mathbb{R} \setminus E$. Dans ce cas, $\sup E - \frac{r}{2}$ est un majorant de E (en effet, aucun élément de E se trouve dans $[\sup E - \frac{r}{2}, \sup E] \subseteq B(\sup E, r) \subseteq \mathbb{R} \setminus E$), ce qui est une contradiction.

Question 3. (5pts) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui tend vers $+\infty$.

a) Montrer qu'il existe un rang $K \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \neq 0$ pour tout $n \geq K$.

b) Montrer que la suite $(\frac{1}{a_{n+K-1}})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Solution. a) Comme $a_n \rightarrow \infty$, avec $M = 1$, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq K \Rightarrow a_k \geq 1$.

b) Soit $\varepsilon > 0$. Comme $a_{n+K-1} \rightarrow \infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $a_{n+K-1} \geq \frac{1}{\varepsilon}$. On a donc $\frac{1}{a_{n+K-1}} \leq \varepsilon$. Notons qu'au a), on a aussi montré que $a_{n+K-1} > 0$, donc on a $\left| \frac{1}{a_{n+K-1}} \right| \leq \varepsilon$, d'où $\frac{1}{a_{n+K-1}} \rightarrow 0$.

Question longue.

Question 4. (9pts) (Il est interdit d'utiliser les fonctions exponentielles et logarithmes) Pour chaque $x > 0$, on définit

$$E_x = \{n \in \mathbb{Z} \mid 10^n \leq x\}.$$

a) Montrer que $\sup E_x$ existe, quelque soit $x > 0$. *Suggestion.* Pour E_x non vide : pour $n < 0$, utiliser l'inégalité de Bernoulli pour obtenir $10^n \leq \frac{1}{(1-9n)}$.

b) Montrer qu'il existe un entier $q \in E_x$ tel que $q \leq \sup E_x < q + 1$. Dédurre que $10^q \leq x < 10^{q+1}$.

c) Montrer que $\sup E_{xy} \geq \sup E_x + \sup E_y$, où $x, y > 0$.

Remarque. Ici, $E_{xy} = \{n \in \mathbb{Z} \mid 10^n \leq xy\}$.

Solution. a) E_x non vide : Par l'inégalité de Bernoulli, on a $10^n = (1+9)^n \geq 1+9n$, donc $\frac{1}{10^n} \leq \frac{1}{1+9n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par la propriété d'Archimède, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > \frac{1}{x}$. On a donc

$$x > \frac{1}{N} \geq \frac{1}{1+9N} \geq \frac{1}{10^N} = 10^{-N}.$$

Il suit que $-N \in E_x$.

E_x majoré : On montre que x est un majorant de E_x . Si $x < 1$, alors lorsque $10^n \leq x < 10^0 = 1$, on peut conclure que $n \leq 0$, donc 0 est un majorant de E_x et par conséquent, x aussi.

Si $x \geq 1$, alors pour $n \geq 1$, on a $n \leq 1+9n \leq 10^n \leq x$ et pour $n < 1$, on a $n < 1 < x$. En combinant les deux cas, on déduit que x est un majorant.

Par l'axiome de complétude, $\sup E_x$ existe.

b) Il y a plus d'une solution possible. En voici deux.

Solution 1. On montre que $\sup E_x \in E_x$. Comme $E_x \subseteq \mathbb{Z}$, il suit que $\mathbb{R} \setminus E_x$ est une union d'intervalles ouverts, donc c'est un ouvert. Il suit que E_x est fermé et par le Q2, on a que $\sup E_x \in E_x$. Ainsi, $q := \sup E_x$ est un entier qui fait l'affaire. On a $10^q \leq x$, puisque $q \in E_x$. On a $10^{q+1} > x$ puisque $q+1 \notin E_x$ (sinon, q ne serait pas le supremum de E_x).

Solution 2. On pose $q := \lfloor \sup E_x \rfloor$. Il est clair que q est un entier et vérifie $q \leq \sup E_x < q+1$. Il reste à montrer que $q \in E_x$ et $q+1 \notin E_x$.

On considère deux cas. Si $q < \sup E_x$, alors il existe $m \in E_x$ tel que $q \leq m < \sup E_x$. Comme il n'y a aucun entier entre q et $\sup E_x$, on a $m = q$, donc $q \in E_x$.

Si $q = \sup E_x$, alors $\sup E_x$ est un entier. Si $q \notin E_x$, alors $q-1$ est un majorant de E_x , car pour tout $m \in E_x$, on a $10^m \leq x < 10^q$, donc $m < q$, d'où $m \leq q-1$. Ceci est une contradiction, donc $q \in E_x$.

On doit avoir $q+1 \notin E_x$ pour la même raison qu'à la solution 1. Il suit que $10^q \leq x < 10^{q+1}$.

c) Soit $p \in E_x$, $q \in E_y$ tels que $p \leq \sup E_x < p+1$ et $q \leq \sup E_y < q+1$. Pour tout $m \in E_x$ et tout $n \in E_y$, on a

$$10^m 10^n = 10^{m+n} \leq xy.$$

Ainsi, $m+n \in E_{xy}$ donc $m+n \leq \sup E_{xy}$. Comme $m \leq \sup E_{xy} - n$ pour tout $m \in E_x$, il suit que $E_{xy} - n$ est un majorant de E_x , donc $\sup E_x \leq \sup E_{xy} - n$.

Ensuite, comme $n \leq \sup E_{xy} - \sup E_x$ pour tout $n \in E_y$, il suit que $\sup E_{xy} - \sup E_x$ est un majorant de E_y , donc $\sup E_y \leq \sup E_{xy} - \sup E_x$. On conclut que $\sup E_x + \sup E_y \leq \sup E_{xy}$.

Voici une autre solution si on a montré au b) que $\sup E_x$ est un entier. On pose $p = \sup E_x \in E_x$ et $q = \sup E_y \in E_y$. On a

$$10^{p+q} \leq xy.$$

Il suit que $p+q \in E_{xy}$, donc $p+q \leq \sup E_{xy}$.

Remarque : il est seulement possible de considérer $10^{\sup E_x}$ on a montré que $\sup E_x$ est un entier, car on ne peut pas utiliser la fonction exponentielle.