

Analyse 1

Université de Montréal — Département de mathématiques

Examen intra 1

Enseignant : Jonathan Godin
Session : E25

Mercredi 4 juin 2025

Aucun matériel permis. L'examen est sur 25 points et il dure 1h50 (110 minutes).
Justifiez toutes vos réponses.

Rappel : la partie entière de $x \in \mathbb{R}$ est l'unique entier $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ tel que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Question 1. (6pts) Vrai ou faux. Répondez à 2 questions parmi A, B et C. Vous pouvez faire la question exclue pour un bonus tout-ou-rien de 1 points. **Indiquez clairement** laquelle est faite en bonus. **Justifiez vos réponses.** (Vous ne pouvez pas faire appel au résultat d'un exercice.)

A. Soit $E = (0, 2) \cup \{3\}$. Le point $x = 3$ est un point limite de E .

B. Si $x \geq 2$, alors l'inégalité $\frac{x^2 - x + 1}{x + 1} \geq \frac{1}{2}$ est vérifiée.

C. L'ensemble $A = \left\{ \frac{k}{2^{n-1}} \mid n, k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n \text{ et } k \text{ impair} \right\}$ est dénombrable.

Questions courtes.

Question 2. (5pts) Montrer que si $E \subseteq \mathbb{R}$ est fermé et $\sup E$ existe, alors $\sup E \in E$.

Question 3. (5pts) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui tend vers $+\infty$.

- a) Montrer qu'il existe un rang $K \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \neq 0$ pour tout $n \geq K$.
- b) Montrer que la suite $\left(\frac{1}{a_{n+K-1}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Question longue.

Question 4. (9pts) (Il est interdit d'utiliser les fonctions exponentielles et logarithmes) Pour chaque $x > 0$, on définit

$$E_x = \{n \in \mathbb{Z} \mid 10^n \leq x\}.$$

- a) Montrer que $\sup E_x$ existe, quelque soit $x > 0$. *Suggestion.* Pour E_x non vide : pour $n < 0$, utiliser l'inégalité de Bernoulli pour obtenir $10^n \leq \frac{1}{(1-9n)}$.
- b) Montrer qu'il existe un entier $q \in E_x$ tel que $q \leq \sup E_x < q + 1$. Dédurre que $10^q \leq x < 10^{q+1}$.
- c) Montrer que $\sup E_{xy} \geq \sup E_x + \sup E_y$, où $x, y > 0$.
Remarque. Ici, $E_{xy} = \{n \in \mathbb{Z} \mid 10^n \leq xy\}$.