Analyse 1

Série 5

Dérivée

1. Définition

Exercice 1. Calculer $f'(0)$, où $f(x) := x|x|$. Est-ce que $f''(0)$ existe ?

Exercice 2. Soit f une fonction dérivable et $c \in \mathbb{R}$ une constante.

a) Montrer à l'aide de la définition que si $g(x) = f(x) + c$, alors $g'(x) = f'(x)$. Expliquer ce que cela veut dire géométriquement.

b) Montrer à l'aide de la définition que si $h(x) = f(cx)$, alors $h'(x) = cf'(cx)$.

Exercice 3. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ et soit $a \in I$. Montrer que s'il existe un reste r et un nombre $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(a+h) = f(a) + ch + r(h)h,$$

où $r(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = c$.

Exercice 4. Soit $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I$, alors a-t-on que $f'(x) \leq g'(x)$ pour tout $x \in I$?

Exercice 5. Soit I un intervalle ouvert et $a \in I$. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction. On pose

$$L = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}.$$

a) Montrer que si f est dérivable en a, alors la limite L existe et $f'(a) = L$.

b) Réciproquement, si la limite L existe, alors f est-elle dérivable en a ?

Exercice 6. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Montrer que $f'(0)$ existe.

Exercice 7. Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $a \in I$ un point. Soit $f, g, h\colon I \to \mathbb{R}$ trois fonctions telles que $f(a) = g(a) = h(a)$ et $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ pour tout $x \in I$. Montrer que si f et h sont dérivables en a et que $f'(a) = h'(a)$, alors g est dérivable en a et $g'(a) = f'(a) = h'(a)$.

2. Règles de calcul

Exercice 8. Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \cos(x + \log x)$

b) $f(x) = x\sin(x^2) - \log\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

c) $f(x) = x^x$

d) $f(x) = e^{x^2 \tan x}$

Exercice 9. Soit $f(x) = x^3$.

a) Calculer $f'(x)$.

b) Calculer $f'(x^2)$.

c) On pose $g(x) = f(x^2)$. Calculer $g'(x)$. A-t-on $g'(x) = f'(x^2)$?

Exercice 10. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Calculer la dérivée de f en fonction de g et de g'.

a) $f(x) = g\big(x + g(a)\big)$

b) $f(x) = \Big(xg\big(x+a\big)\Big)^2$

c) $f(x) = g\big(xg(x)\big)$

d) $f(x) = g(x)g\big(x^2 + g(x)\big)$

Exercice 11. Soit $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

a) Montrer que f est continue en 0.

b) Montrer que f est dérivable en 0.

c) Montrer que f' est continue en 0.

Exercice 12. a) Démontrer la formule de Leibniz :

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(u \cdot v) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)} \cdot v^{(k)},$$

où u et v sont des fonctions n-fois dérivable. Ici, $u \cdot v$ représente le produit de u et de v.

b) Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Indice. Appliquez la formule du a) aux fonctions $u(x) = v(x) = x^n$.

Exercice 13. En utilisant l'identité

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x},$$

trouver une formule pour exprimer

$$\sum_{k=0}^{n} kx^{k-1}.$$

3. Extrémums

Exercice 14. Calculer le maximum et le minimum des fonctions suivantes.

a) $f(x) = x^2 - x$ sur $[0,1]$

b) $f(x) = (x-2)\sqrt[3]{x^2}$ sur $[-3,3]$

c) $f(x) = xe^x$ sur $[-2,1]$

d) $f(x) = \begin{cases} x\log x, & \text{si } x \in (0,1], \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Exercice 15. Déterminer si $5^{\sqrt{6}}$ est plus grand ou plus petit que $6^{\sqrt{5}}$.
Suggestion. Comparez $f(5)$ et $f(6)$, où $f(x) = \frac{\log x}{\sqrt{x}}$.

Exercice 16. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On pose $g(x) := f \circ f(x)$. Quels sont les points critiques de g ?
Rappel. On dit que x est un point critique de g si $g'(x) = 0$.

Exercice 17. Soit $a < c < b$. Soit $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables telles que $f(c) = g(c)$ et $f'(x) > g'(x)$ pour tout $x \in [a,b]$.

a) Montrer que $f(x) > g(x)$ pour tout $x \in (c,b]$.

b) Montrer que $f(x) < g(x)$ pour tout $x \in [a,c)$.

4. Théorème de Rolle et des accroissements finis

Exercice 18. Soit I un intervalle et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.

a) Montrer que f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.

b) Montrer que si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement croissante sur I.

Exercice 19. Soit $f(x) = 1 - (1-x)^{\frac{2}{3}}$, pour $x \in [0,2]$. Existe-t-il un $y \in (0,2)$ tel que $f'(y) = 0$? Cela contredit-il le théorème de Rolle ?

Exercice 20. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $f'(x) \geq M$ pour tout $x \in [a,b]$. Montrer que $f(b) \geq f(a) + M(b-a)$.
Remarque. On sait déjà que $f(b) \geq f(a)$, car l'hypothèse implique que f est croissante. Ainsi, cet exercice donne une inégalité un peu plus fine.

Exercice 21. Montrer les inégalités suivantes.

a) $\sin x \leq x \quad (x \geq 0)$ b) $1 + x \leq e^x \quad (x \in \mathbb{R})$ c) $\sqrt{1+x} \leq 1+\frac{1}{2}x \quad (x > -1)$

Exercice 22. Trouver le nombre exact de zéro du polynôme $p(x) = x^4-8x^3-21x^2+22x-2$. *Indice*. Tous les zéros se trouvent dans $(-3, 11)$.

Exercice 23. Soit $a < c < b$. Soit $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $f'(x)$ existe en tout point $x \neq c$. Montrer que si $\lim\limits_{x\to c} f'(x)$ existe, alors f est dérivable en c.

Exercice 24. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que si f' est continue, alors il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x, y \in [a,b]$, on a $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$.

Exercice 25. Soit la suite (a_n) définie par $a_1 = -\frac{1}{8}$ et $a_{n+1} = a_n^3 + a_n^2$ pour $n \geq 1$. Soit $f(x) = x^3 + x^2$.

a) Montrer que $|a_n| \leq \frac{1}{4}$.

b) Montrer que $|f'(x)| \leq \frac{11}{16}$ pour tout $x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$.

c) À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que (a_n) est Cauchy.

Exercice 26†. Soit $f\colon [a,b] \to [a,b]$ une fonction dérivable. On suppose qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = x_0$. On suppose de plus que f' est continue en x_0.

a) Montrer que si $|f'(x_0)| < 1$, alors il existe $k > 0$ et $\delta > 0$ tels que pour tout $x \in [a,b]$, si $|x - x_0| < \delta$, alors $|f'(x)| \leq k < 1$.

b) Montrer que si $|x - x_0| < \delta$, alors $|f(x) - x_0| < \delta$.

c) Soit $c \in [a,b]$. On définit la suite (a_n) par $a_1 = c$ et $a_{n+1} = f(a_n)$ pour $n \geq 1$. Montrer que si $|c - x_0| < \delta$, alors (a_n) est une suite de Cauchy.

d) Montrer que (a_n) converge vers x_0.

5. Règle de l'Hôpital

Exercice 27. Calculer les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin(5x)}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{\sin x}{\sin(5x)} - \frac{1}{5}\right)}{x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (x + 2^x)^{\frac{1}{x}}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{b^x - 1}$, $(a, b > 0)$

e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (\arctan(x+1) - \arctan x)$ f) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{x} \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

Exercice 28. On calcule une limite de la façon suivante :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{x-1} \overset{\text{R.H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x}{1} = 0.$$

Quelle est l'erreur ? Calculer la limite de la bonne façon.

Exercice 29. On calcule une limite de la façon suivante :

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right) \overset{\text{R.H}}{=} \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right) = 0.$$

Quelle est l'erreur ? Calculer la limite de la bonne façon.

Exercice 30. On calcule une limite de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{\sin x} = \frac{e^0-1}{\sin 0} &= \frac{0}{0} \qquad \text{(forme indéterminée)} \\ &\overset{\text{R.H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}}{\cos x} \\ &= \frac{1}{1} = 1. \end{aligned}$$

Quelle est l'erreur ? Calculer la limite de la bonne façon.

Exercice 31. Tenter de résoudre la limite en utilisant la règle de l'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+3}}{x+3}.$$

Quelle est le problème ? Résoudre par une autre méthode.

Exercice 32†. Calculer la limite

$$\lim_{x\to\infty} x \frac{x^{\frac{1}{x}}-1}{\log x}.$$

6. Développements limités et Théorème de Taylor

Exercice 33. Soit $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable en 0 telle que $f(0) = 0$. On pose

$$g(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ f'(0), & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Calculer $g'(0)$.

Exercice 34. Soit f une fonction trois fois dérivable en 0 telle que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sin x - x} = 1.$$

Déterminer son développement limité jusqu'à l'ordre trois.

Exercice 35. Montrer que pour $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, on a $\tan x > x + \frac{x^3}{3}$.

Exercice 36. Montrer les inégalités suivantes en utilisant le théorème de Taylor.

a) $|\sin x - x| \leq \frac{x^2}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$

b) $|\log(1+x) - x| \leq \frac{x^2}{2} \quad (x \geq 1)$

Exercice 37†. a) Montrer que le développement de Taylor de $\log(1+x)$ en $x = 0$ est

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \frac{(-1)^{n+1}}{(1+\xi)^n} \frac{x^n}{n},$$

où $\xi \in (-x, x)$.

b) Montrer que si $x \in [0,1]$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$x - \tfrac{x^2}{2} + \cdots - \tfrac{x^{2n}}{2n} \leq \log(1+x) \leq x - \tfrac{x^2}{2} + \cdots + \tfrac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

c) Déduire que $\log 2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Attention! Il est vrai qu'on a $\log(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ pour tout $x \in (-1,1)$, mais ce n'est pas une conséquence du théorème de Taylor. En général, le théorème de Taylor ne permet pas de faire un développement « jusqu'à l'infini ». Comparer avec l'exercice 38.

Exercice 38†. On pose $f(x) := e^{-\frac{1}{x}}$ si $x > 0$ et $f(x) := 0$ si $x \leq 0$.

a) Montrer que f est dérivable et calculer $f'(0)$.

b) Montrer qu'il existe deux polynômes P_n, Q_n tels que $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} e^{-\frac{1}{x}}$ pour $x > 0$.

c) Montrer que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) Selon le théorème de Taylor, on a

$$f(x) = f(0) + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + f^{(n+1)}(\xi)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

pour un certain $\xi \in (-x, x)$. Or, par le c), on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} = 0 \neq f(x) \quad \text{pour } x > 0.$$

Expliquer pourquoi cela ne contredit pas le théorème de Taylor.

7. Autres

Exercice 39. Tracer le graphe des fonctions suivantes.

a) $f(x) = (x-1)e^x$

b) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x - 10$

c) $f(x) = \frac{x^2(x-2)}{x-1}$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{|1-x^2|}}{x}$

Exercice 40. Calculer la série de Taylor en $x = 0$ des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

b) $f(x) = \sqrt{1+x}$

c) $f(x) = e^{x^2}$

d) $f(x) = \log(1+x)$

e) $f(x) = \arctan x$

f) $f(x) = \sin(x^2)$

Exercice 41. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable non constante telle que $f(0) = 1$. Montrer que si $f'(x) = f(x)$ pour tout x, alors $f(x) = e^x$.
Indice. Le problème est équivalent à montrer que $\frac{f(x)}{e^x} = 1$.

Exercice 42. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f'(0) = 1$. Montrer que si $f(x+y) = f(x)f(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, alors $f(x) = e^x$.