Analyse 1

Série 4

Séries (solutionnaire)

1. Notions de base

Exercice 1. Montrer que les séries suivantes divergent.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$ b) $\displaystyle\sum_{n=10}^{\infty} \sqrt[n]{n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=31}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$ d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2}$

Solution. Dans tous les cas, il suffit de vérifier que $a_n \not\to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice 2. Soit (a_n) une suite. On pose $s = \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur (a_n) pour que s converge.

Solution. Soit (s_n) la suite des sommes partielles de s. On voit que

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_2 - a_1,\\
s_2 &= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) = a_3 - a_1,\\
s_3 &= s_2 + (a_4 - a_3) = a_4 - a_1,\\
s_4 &= s_3 + (a_5 - a_4) = a_5 - a_1,\\
&\vdots\\
s_n &= s_{n-1} + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Ainsi, (s_n) est convergente si et seulement si (a_n) est convergente.

Exercice 3. Soit $m \in \mathbb{N}$ et $|r| < 1$. On considère la série $s = \sum\limits_{n=m}^{\infty} r^n$. Montrer que $s = \frac{r^m}{1-r}$.

Exercice 4. Pour chaque série, calculer sa valeur si elle converge.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{n!}$ c) $\displaystyle\sum_{n=2000}^{\infty} \frac{1}{3^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2+n}\right)$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n^2+2n}\right)$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{(-1)^n}{2^n} \right\rfloor$

Solution. a) C'est une série géométrique, donc on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}.$$

b) La série diverge. En effet, le terme général de la série tend vers 1. (Voir l'exercice 36 de la série 2.)

c) C'est une série géométrique. À l'aide de l'exercice 3, on trouve

$$\sum_{n=2000}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}^{2000}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2 \cdot 3^{2000}}$$

d) On divise le terme général en fractions partielles. On trouve

$$\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

C'est donc une série téléscopique. Par le numéro 2, on sait qu'elle converge et qu'elle vaut

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2+n} \right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) = 1.$$

e) On utilise à nouveau les fractions partielles. On a

$$\frac{2}{n^2+2n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}.$$

L'idée est très semblable au numéro 2. Pour les sommes partielles (s_n), on a

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1 - \tfrac{1}{3} \\
s_2 &= \left(1 - \tfrac{1}{3}\right) + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\right) \\
s_3 &= \left(1 - \tfrac{1}{3}\right) + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5}\right) \\
&= 1 - \tfrac{1}{5} + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\right) \\
s_4 &= s_3 + \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{6}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \\
s_5 &= s_4 + \left(\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7}\right) \\
&= 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{7} \\
&\vdots \\
s_n &= 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{n+1} - \tfrac{1}{n+2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, il suit que la série converge et tend vers $\frac{3}{2}$.

f) Pour n pair, on a $\left\lfloor \frac{(-1)^n}{2^n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{2^n} \right\rfloor = 0$. Pour n impair, on a $\left\lfloor \frac{(-1)^n}{2^n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{-1}{2^n} \right\rfloor = -1$. Ainsi, la série est en fait de la forme $\sum -\frac{(1+(-1)^{n+1})}{2}$, qui diverge, selon le numéro 1d).

Exercice 5. Soit $s = \sum a_n$ une série. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents.

a) s converge;

b) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, alors
$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} a_n \right| < \varepsilon;$$

c) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n, m \geq N$ avec $n \leq m$, alors
$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_n \right| < \varepsilon.$$

Exercice 6. Soit $s = \sum (-1)^n$ et soit (s_n) la suite des sommes partielles. On voit que
$$s_{2n} = \underbrace{(-1+1) + (-1+1) + \cdots (-1+1)}_{n \text{ blocs}} = 0$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc que $s = \lim_{n\to\infty} s_{2n} = 0$. Où est l'erreur ?

Solution. L'argument montre que (s_{2n}) converge vers 0, mais il ne dit pas que (s_n) converge vers 0. En fait, ici on voit que $s_{2n+1} = -1$ pour tout n, donc $s_{2n+1} \to -1$. Il suit que (s_n) ne converge vers aucune limite.

Exercice 7. Soit (a_n) une suite. Soit $s = \sum a_n$ une série et (s_n) la suite des sommes partielles de s. Montrer que si s converge vers L, alors
$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_1 + s_2 + \cdots s_n}{n} = L.$$

Solution. Il suffit d'appliquer le numéro 10 de la série 2.

Exercice 8†. Soit (a_n) une suite positive, $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série et (s_n) la suite des sommes partielles de s. On suppose que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_1 + \cdots s_n}{n}$$
converge (voir l'exercice 7). Montrer que si (na_n) est bornée, alors la série s converge.
Indice. Si $t_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} s_k$, alors montrez d'abord que $s_n - \frac{n}{n+1} t_n$ est bornée.

Solution. Puisque (na_n) est bornée, il existe M tel que $na_n \leq M$ pour tout n. On a donc

$$\begin{aligned}
s_n - \frac{n}{n+1}t_n &= s_n - \frac{1}{(n+1)}\sum_{k=1}^{n} s_k \\
&= s_n - \frac{1}{(n+1)}\sum_{k=1}^{n}(a_1 + \cdots + a_k) \\
&= s_n - \frac{1}{(n+1)}\Big(na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + 2a_{n-1} + a_n\Big) \\
&= \frac{1}{n+1}\left[\sum_{k=1}^{n}(n+1)a_k - \Big(na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + 2a_{n-1} + a_n\Big)\right] \\
&= \frac{1}{n+1}\Big(a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n\Big) \\
&\leq \frac{1}{n+1}(M + M + \cdots + M) \\
&= \frac{n}{n+1}M \leq M.
\end{aligned}$$

Il suit que $(s_n - \frac{n}{n+1}t_n)$ est bornée par M. Puisque (t_n) converge, elle est bornée par, disons, R. Il s'ensuit que (s_n) doit être bornée, car $s_n \leq M + \frac{n}{n+1}t_n \leq M + R$. Puisque (s_n) est une série à termes positifs, elle est croissante et donc convergente.

2. Séries à termes positifs

Exercice 9. Déterminer la nature des séries suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n+14}$ c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{n^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+17}$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$, $a > 0$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3}{5^n+7}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+1/n}}$ i) $\displaystyle\sum_{n=\lfloor|a|\rfloor+1}^{\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right)^n$, $a \in \mathbb{R}$

Suggestion pour le c). Montrer que $\frac{1}{n!} \leq \frac{n!}{n^n}$.

Solution. a) Diverge b) Diverge, car le terme général ne tend pas vers 0.

c) Diverge, car le terme général ne tend pas vers 0.

d) Converge, par le critère du quotient, avec $b_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, et le critère de Riemann.

e) Converge, par le critère de d'Alembert.

f) Converge, par comparaison avec la série géométrique $\sum\left(\frac{4}{5}\right)^n$.

g) Converge, par le critère de la racine de Cauchy.

h) Converge, par le critère du quotient, avec $b_n = \frac{1}{n}$.

i) Diverge, car le terme général ne tend pas vers 0.

Exercice 10. Soit (a_n) une suite telle que $n^2 a_n \to 0$. Montrer que $\sum a_n$ converge.

Solution. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, alors $|n^2 a_n| < 1$. Ainsi, pour tout $n \geq N$, on a $|a_n| < \frac{1}{n^2}$. On sait que $\sum\limits_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, donc par le critère de comparaison, la série $\sum a_n$ converge.

Exercice 11. Montrer que la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ converge et calculer sa valeur.

Indice. Utilisez le fait que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

Exercice 12. Sommation par partie. Soit (a_n) et (b_n) deux suites. Soit $s = \sum a_n$ et (s_n) la suite de ses sommes partielles, avec $s_0 := 0$. Montrer que pour $n < m$, on a

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k = \big(s_m b_{m+1} - s_n b_{n+1}\big) - \sum_{k=n+1}^{m} s_k (b_{k+1} - b_k).$$

Remarque. Si vous pensez au symbole de sommation $\sum$ comme au symbole d'intégrale, à s_n comme à une primitive de a_n et à $(b_{k+1} - b_k)$ comme à une dérivée de b_k, on constate que cette formule est analogue à l'intégration par partie, où n et m jouent le rôle des bornes.

Solution. Il s'agit de réarranger les termes correctement. On a

$$\begin{aligned}
&\big(s_m b_{m+1} - s_n b_{n+1}\big) - \sum_{k=n+1}^{m} s_k (b_{k+1} - b_k) \\
&\quad = -s_n b_{n+1} + s_{n+1}(b_{n+1} - b_{n+2}) + s_{n+2}(b_{n+2} - b_{n+3}) \\
&\qquad\quad + \cdots + s_m(b_m - b_{m+1}) + s_m b_{m+1} \\
&\quad = \sum_{k=n+1}^{m} (s_k b_k - s_{k-1} b_k) \\
&\quad = \sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k.
\end{aligned}$$

Exercice 13. Lemme d'Abel. Soit (b_n) une suite décroissante et positive. Soit (a_n) une suite pour laquelle il existe m, M tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$m \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq M.$$

Montrer que

$$b_1 m \leq a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \leq b_1 M.$$

Solution. On utilise la sommation par parties. Soit (s_n) la suite des sommes partielles de $\sum_{n\geq 1} a_n$, avec $s_0 = 0$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= (s_n b_{n+1} - s_0 b_1) - \sum_{k=1}^{n} s_k (b_{k+1} - b_k) \\
&= s_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} s_k (b_{k+1} - b_k) && \text{(car } s_0 = 0\text{)} \\
&= s_n b_{n+1} + s_1 (b_1 - b_2) + \cdots + s_n (b_n - b_{n+1}) \\
&= s_1 (b_1 - b_2) + \cdots + s_{n-1} (b_{n-1} - b_n) + s_n b_n && (*) \\
&\leq M(b_1 - b_2) + \cdots + M(b_{n-1} - b_n) + M b_n && \text{(car } (b_n) \text{ est déc.)} \\
&= M b_1.
\end{aligned}$$

L'autre sens de fait de la même façon. À partir de $(*)$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= s_1 (b_1 - b_2) + \cdots + s_{n-1} (b_{n-1} - b_n) + s_n b_n \\
&\geq m(b_1 - b_2) + \cdots + m(b_{n-1} - b_n) + m b_n \\
&= m b_1.
\end{aligned}$$

Exercice 14. Critère de Dirichlet. Soit $s = \sum a_n b_n$. On pose (t_n) la suite des sommes partielles de $\sum a_n$. Montrer que si (t_n) est bornée et si $b \downarrow 0$, alors s converge.

Solution. Puisque (t_n) est bornée, il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $m \leq t_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, il suit que pour tout $k \leq n$, on a

$$m - M \leq m - s_{k-1} \leq s_n - s_{k-1} \leq M - s_{k-1} \leq M - m.$$

Autrement dit, pour tout k, n entiers avec $1 \leq k \leq n$, on a

$$|a_k + \cdots + a_n| \leq M - m.$$

Ainsi, on applique le lemme d'Abel avec $c_m := a_{k-1+m}$ et $d_m := b_{k-1+m}$, ce qui donne

$$(m - M) d_1 \leq c_1 d_1 + \cdots + c_{n-k+1} d_{n-k+1} \leq (M - m) d_1,$$

c'est-à-dire

$$(m - M) b_k \leq a_k b_k + \cdots + a_n b_n \leq (M - m) b_k.$$

Il suit que $|s_n - s_{k-1}| \leq (M - m) b_k$ et puisque $b_k \to 0$ lorsque $k \to \infty$, cela montre que (s_n) est une suite de Cauchy, d'où elle converge.

3. Séries alternées

Exercice 15. Déterminer la nature des séries suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{2^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n+1}}{n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 2^{n-k}$

Solution. a) On pose $a_n = \frac{n}{2^n}$. On montre que (a_n) est décroissante. On a $a_n \geq a_{n+1} \iff \frac{n}{2^n} \geq \frac{n+1}{2^{n+1}} \iff \frac{n}{n+1} \geq \frac{1}{2}$, ce qui est vrai pour tout $n \geq 1$. Par le critère de Leibniz, on conclut que la série converge.

b) On pose $a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n}$. On montre que (a_n) est décroissante. On a

$$\begin{aligned}
a_n \geq a_{n+1} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{n+1}}{n} \geq \frac{\sqrt{n+2}}{n+1} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{n+1}{n^2} \geq \frac{n+2}{(n+1)} \\
&\Leftrightarrow \quad (n+1)^3 \geq n^2(n+2) \\
&\Leftrightarrow \quad n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \geq n^3 + 2n^2 \\
&\Leftrightarrow \quad n^2 + 3n + 1 \geq 0.
\end{aligned}$$

Par le critère de Leibniz, on conclut que la série converge.

c) La série diverge. En effet, par la formule du binôme, on a

$$(2-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 2^{n-k}.$$

Ainsi, la série se réécrit $\sum 1$, qui tend vers ∞.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$$

Exercice 16. Soit (a_n) la suite définie par $a_n = \frac{1}{n}$. Soit $s = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ la série harmonique alternée. On pose $m_0 := 0$.

a) Montrer qu'il existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{k=1}^{m_1} a_{2k-1} > 1.$$

b) Montrer qu'il existe $m_2 \in \mathbb{N}$ tel que $m_2 > m_1$ et

$$\sum_{k=1}^{m_1} a_{2k-1} - a_2 + \sum_{k=m_1+1}^{m_2} a_{2k-1} > 2.$$

c) Pour $\ell \geq 2$ entier, montrer qu'il existe $m_\ell > m_{\ell-1}$ et

$$\sum_{k=1}^{m_1} a_{2k-1} - a_2 + \sum_{k=m_1+1}^{m_2} a_{2k-1} - a_4 + \cdots + \sum_{k=m_{\ell-1}+1}^{m_\ell} a_{2k-1} > \ell.$$

d) Déduire que la série

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\sum_{k=m_{\ell-1}+1}^{m_\ell} a_{2k-1} - a_{2\ell} \right) = +\infty.$$

Remarque. Ce numéro illustre un *réarrangement* de la série harmonique qui diverge. Autrement dit, en changeant l'ordre dans lequel on additionne les termes de la somme, on trouve un limite différente. Cela est seulement possible pour les séries conditionnellement convergentes. Comparer avec l'exercice 29.

4. Convergence absolue

Exercice 17. Déterminer la nature des séries suivantes. (Absolument convergente, conditionnellement convergente, divergente.)

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{n}{2} - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \frac{1}{4}}{n}$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \big(n - (-1)^n n\big)$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-n)^n}{n^n}$

Solution. a) Converge absolument, série géomtrique.

b) Converge conditionnellement, par le critère de Leibniz.

c) Converge absolument, par le critère de d'Alembert,

d) Converge conditionnellement, car le terme général se réécrit $\frac{(-1)^{n+1}}{4n}$.

e) Diverge, car le terme général ne tend pas vers 0.

f) Diverge, car le terme général ne tend pas vers 0.

Exercice 18. Soit $s = \sum a_n$ une série convergente. Montrer que s'il existe $0 \leq M < 1$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $|a_{n+1}| \leq M|a_n|$ pour tout $n \geq N$, alors

$$|s - s_n| \leq \frac{M}{1-M}|a_n| \qquad \text{pour tout } n \geq N,$$

où (s_n) est la suite des sommes partielles de s.

Exercice 19. Soit $s = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

a) Montrer que s est conditionnellement convergente.

b) Donner l'expression du produit de Cauchy de s avec elle-même.

c) Montrer que ce produit diverge.
Indice. Si le produit de Cauchy s'écrit $s * s = \sum c_n$, alors montrez que $|c_n| \geq \frac{1}{2}$. Pour ce faire, montrez que $(n-k+1)(k+1) \leq (n+1)^2$ lorsque $n \geq k$.

Solution. a) On pose $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Il est clair que $a_n \to 0$. On montre que (a_n) est décroissante. On a $a_n \geq a_{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+2}} \Leftrightarrow \sqrt{n+2} \geq \sqrt{n+1}$, ce qui est vrai. Par le critère de Leibniz, la série converge.

Par le critère de Riemann, on voit que $\sum \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ diverge, donc la s est conditionnellement convergente.

b) On a

$$s * s = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (-1)^{n-k}}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$$

c) Puisque $0 \leq k \leq n$, on a $(k+1)(n-k+1) \leq (n+1)(n-k+1) \leq (n+1)(n+1) = (n+1)^2$. Ainsi, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n-k+1)}} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n+1)} = \frac{n}{n+1} \geq \frac{1}{2}.$$

Il suit que le terme général de $s * s$ ne tend pas vers 0, d'où la série diverge.

Exercice 20. Montrer que $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \right)^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

Exercice 21. Soit $|r| < 1$. Montrer que $\frac{1}{(1-r)^2} = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n \right)^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) r^n$.

5. Séries entières

Exercice 22†. Fonction génératrice de la suite de Fibonacci. Soit $a_0 := 0$ et $a_1 := 1$. Pour $n \geq 1$, on pose $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Soit la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Déterminer son rayon de convergence.

Solution. On utilise le critère de d'Alembert. Pour $n \geq 1$, on pose $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ et $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, le nombre d'or. On montre que $b_n \to \varphi$.

D'abord, on a

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} + a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{b_n}.$$

On montre que (b_n) est une suite de Cauchy à l'aide de cette formule de récurrence. Pour ce faire, on montre d'abord $\frac{3}{2} \leq b_n \leq 2$ pour $n \geq 2$. On voit que $b_2 = \frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{1} = 2$, donc l'inégalité est vraie. Ensuite, on suppose qu'elle est vraie pour b_n : on a

$$\begin{aligned} \tfrac{3}{2} \leq b_n \leq 2 \quad &\Leftrightarrow \quad \tfrac{2}{3} \geq \tfrac{1}{b_n} \geq \tfrac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad 1 + \tfrac{2}{3} \geq 1 + \tfrac{1}{b_n} \geq 1 + \tfrac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \tfrac{5}{3} \geq b_{n+1} \geq \tfrac{3}{2}. \end{aligned}$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned} |b_{n+1} - b_n| &= \left| 1 + \frac{1}{b_n} - 1 - \frac{1}{b_{n-1}} \right| \\ &= \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n-1}} \right| \\ &= \frac{|b_n - b_{n-1}|}{|b_n b_{n-1}|} \\ &\leq \frac{|b_n - b_{n-1}|}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} \\ &= \frac{4}{9}|b_n - b_{n-1}|. \end{aligned}$$

Par l'exercice 36 de la série 2, il suit que (b_n) est Cauchy. Soit L sa limite.

On laisse maintenant $n \to \infty$ dans l'équation $b_{n+1} = 1 + \frac{1}{b_n}$, on trouve $L = 1 + \frac{1}{L}$, dont les deux solutions possibles sont $L = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Puisque $b_n \geq 0$ pour tout n, la limite doit être $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$.

Le rayon de convergence se trouve maintenant à l'aide du critère de d'Alembert. On a

$$\left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} |x|\varphi$$

et $|x|\varphi < 1$ si et seulement si $|x| < \frac{1}{\varphi}$. Le rayon de convergence est donc $R = \frac{1}{\varphi}$.

Exercice 23. Fonction exponentielle. Montrer que le rayon de convergence de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ est infini.

On définit $\exp(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Exercice 24. Propriétés de la fonction exponentielle. Montrer les propriétés suivantes de la fonction exponentielle.

a) $\exp(0) = 1$.

b) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

d) Pour tout $q \in \mathbb{Q}$, on a $\exp(q) = e^q$.

e) La fonction exp est strictement croissante : si $x < y$, alors $\exp(x) < \exp(y)$.

f)† Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $N \in \mathbb{N}$ est tel que $|x| < 2N+1$, alors

$$\sum_{n=0}^{2N-1} \frac{x^n}{n!} \leq \exp(x) \leq \sum_{n=0}^{2N} \frac{|x|^n}{n!} + \frac{|x|^{2N+1}}{(2N)!\,(2N+1-|x|)}.$$

g) La fonction exp est continue en 0. Déduire qu'elle est continue en tout point.

h) La fonction $\exp\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ est bijective.

Indices. Pour le b), pensez à utiliser le produit de Cauchy et la formule du binôme. Pour le d), commencez par les cas $q \in \mathbb{N}$ et $q = \frac{1}{n}$, où $n \in \mathbb{N}$. Pour le e), commencez par le cas $0 \leq x < y$. Faites les autres cas à l'aide du c).

Solution. e) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}.$$

Ainsi, si $|x| < 2N+1 \in \mathbb{N}$, alors par le numéro ??(série 2)b) de la série 2, on a

$$\exp(x) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} \leq \sum_{n=0}^{2N} \frac{|x|^n}{n!} + \frac{x^{2N+1}}{(2N+1-|x|)(2N)!}.$$

Ceci montre la majoration.

Pour la minoration, si $x \geq 0$, alors elle est évidente, puisqu'enlever des termes positifs à une série la rend nécessairement plus petite. On suppose donc que $-2N-1 < x < 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, on a

$$\frac{x^{2N+2k}}{(2N+2k)!} + \frac{x^{2N+2k+1}}{(2N+2k+1)!} = \frac{x^{2N+2k}}{(2N+2k)!}\left(1 + \frac{x}{2N+2k+1}\right). \qquad (*)$$

Puisque $-2N-1 < x$, on a que $-1 < \frac{x}{2N+2k+1}$. De plus, $x^{2N+2k} > 0$. Ainsi, on conclut que $(*)$ est strictement positif.

Ensuite, on a

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{2N-1} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=2N}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{2N-1} \frac{x^n}{n!} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^{2N+2k}}{(2N+2k)!} + \frac{x^{2N+2k+1}}{(2N+2k+1)!} \right) \quad \text{(car la série converge)} \\
&\geq \sum_{n=0}^{2N-1} \frac{x^n}{n!} \quad \text{(car les termes de la deuxièmes sommes sont positifs).}
\end{aligned}$$

Exercice 25. Trouver une série entière pour exprimer les fonctions suivantes pour $|x| < 1$.

a) $\frac{1}{1-x^2}$ b) $\frac{1}{(1-x)^2}$ c) $\frac{1+x}{1-x}$

Solution. Pour chaque partie, on utilise le fait que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \tag{$*$}$$

pour $|x| < 1$. Cela découle simplement de la formule d'une série géométrique de raison $r = x$.

a) On remplace x par x^2 dans $(*)$:

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}.$$

b) Cette fois, on utilise $(*)$ et le produit de Cauchy. Puisque la série dans $(*)$ converge absolument pour $|x| < 1$, on sait quel produit de Cauchy converge absolument. On a

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k x^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n.$$

c) On a

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{1-x} + \frac{x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + x \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2x^n.$$

6. Autre

Pour cette section, on tient pour acquis l'existence de la fonction logarithmique en base e. On tient pour acquis que $\log\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ est telle que $\log(xy) = \log x + \log y$, $\log x^y = y \log x$, log est strictement croissante et $\log e = 1$.

Exercice 26. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer pour quelles valeurs de α la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$ converge.

Attention, on ne peut pas utiliser le critère de l'intégrale!

Solution. On utilise le critère de condensation de Cauchy. On pose $a_n = \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$. On a alors

$$a_{2^n} = \frac{1}{2^n(\log 2^n)^\alpha} = \frac{1}{2^n n^\alpha (\log 2)^\alpha}.$$

Ensuite, on voit que la série $\sum 2^n a_{2^n} = \sum \frac{1}{n^\alpha(\log 2)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$, par le critère de Riemann.

Réponse : $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 27. Pour cet exercice, on tient pour acquis l'existence et les propriétés des fonctions transcendantes usuelles (sin, cos, tan, exp, log, etc.). Déterminer la nature des séries suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos(a_n)$, où $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n}{n+1}\right)$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+\cos n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$

Solution. a) La série diverge, car on doit avoir $a_n \to 0$ et donc $cos(a_n) \to 1$. Puisque le terme général de la série ne tend pas vers 0, il s'ensuit que la série diverge.

b) La série diverge. On a $\log\left(\frac{n}{n+1}\right) = \log n - \log(n+1)$. C'est donc une série téléscopique, mais la suite $(\log n)$ diverge, d'où la série diverge par l'exercice 2.

c) La série converge par le critère du quotient. En effet, on a

$$\frac{n^2}{n^2+\cos n} \to 1$$

lorsque $n \to \infty$. Puisque $\sum \frac{1}{n^2}$, il suit que la série de départ converge.

d) On utilise le critère de condensation de Cauchy. On pose $a_n = \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$. On a

$$a_{2^n} = \frac{1}{(\log 2^n)^{\log 2^n}} = \frac{1}{(n\log 2)^{n\log 2}} = \frac{1}{n^{n\log 2}(\log 2)^{n\log 2}} \leq \frac{1}{n^n}.$$

On a que $2^n a_{2^n} \leq \frac{2^n}{n^n}$, donc par le critère de comparaison, la série $\sum 2^n a_{2^n}$ converge. Par le critère de condensation de Cauchy, on conclut que la série de départ converge.

Exercice 28. Soit (a_n) la suite dont le terme général est $a_n = \frac{n}{n+1} + \frac{n}{n+4} + \frac{n}{n+4^2} + \cdots + \frac{n}{n+4^n}$.

a) Montrer que (a_n) vérifie

$$a_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n}{n+4^k} \qquad (*)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que $a_n \geq \frac{n}{n+1} + \frac{1}{3}$

Solution. a) On a

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n+4^k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n}{n+4^k}.$$

b) Pour $n \geq 2$ et $1 \leq k \leq n$, on a

$$\begin{aligned} \frac{n}{n+4^k} \geq \frac{1}{4^k} \quad &\Leftrightarrow \quad n4^k \geq n + 4^k \\ &\Leftrightarrow \quad 4^k(n-1) \geq n \\ &\Leftrightarrow \quad 4^k \geq \frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1} \end{aligned}$$

et cette dernière inégalité est vraie, puisque $4^k \geq 4 > 1 + \frac{1}{n-1}$. Ainsi, on a

$$a_n \geq \frac{n}{n+1} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4^n} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{3}.$$

Exercice 29†. Théorème de Riemann. (Facultatif) Montrer que si $\sum a_n$ est conditionnellement convergente, alors pour tout $r \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, il existe un réarrangement $\sum b_n$ de $\sum a_n$ tel que $\sum b_n = r$, en suivant ces étapes.

a) Soit $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ la suite des indices tels que $a_{n_k} \geq 0$ et soit $m_1 < m_2 < m_3 < \cdots$ la suite des indices tels que que $a_{m_k} < 0$. Montrer que $\sum a_{n_i} = \infty$ et $\sum a_{m_i} = -\infty$.

Solution. a) Supposons le contraire. Si $\sum a_{n_i} < \infty$, alors c'est une série absolument convergente. Puisque $\sum a_n$ converge, on a

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{p_n} a_{n_k} + \sum_{k=1}^{q_n} a_{m_k} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=1}^{q_n} a_{m_k} = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{p_n} a_{n_k},$$

où $p_n + q_n = n$. Puisque $\sum a_n$ et $\sum a_{n_k}$ convergent, il suit que $\sum a_{m_k}$ converge, mais cela est impossible, car dans ce cas, $\sum a_n$ serait absolument convergente. C'est une contradiction.

Le raison est le même si l'on suppose que $\sum a_{m_i} > -\infty$.

b) Soit $r = \infty$. On pose $k_0 := 0$.

i) Montrer qu'il existe un plus petit k_1 tel que

$$\sum_{i=1}^{k_1} a_{n_i} > 1.$$

$ii)$ Montrer qu'il existe un plus petit $k_2 > k_1$ tel que

$$\sum_{i=1}^{k_1} a_{n_i} + a_{m_1} + \sum_{i=k_1+1}^{k_2} a_{n_i} > 2.$$

$iii)$ Pour $p \geq 2$, montrer que si k_{p-1} a été déterminé à l'étape précédente, alors il existe $k_p > k_{p-1}$ tel que

$$\sum_{\ell=1}^{p-1} \left(\sum_{i=k_{\ell-1}+1}^{k_\ell} a_{n_i} + a_{m_\ell} \right) + \sum_{i=k_{p-1}+1}^{k_p} a_{n_i} > p.$$

Déduire que cela donne un réarrangement qui tend vers $+\infty$. Expliquer comment trouver une réarrangement qui tend vers $-\infty$.

Solution. b) $i)$ Puisque $\sum a_{n_i} = \infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $k \geq N$, alors

$$\sum_{i=1}^{k} a_{n_i} > 1. \tag{$*$}$$

On pose $E = \{k \in \mathbb{N} \mid (*) \text{ est vraie}\}$. Par ce qui précède, E est non vide. Par le principe du bon ordre, E atteint son minimum, donc on pose $k_1 = \min E$.

$ii)$ Puisque $\sum_{i \geq k_1+1} a_{n_i} = \infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $k \geq N$, alors

$$\sum_{i=k_1+1}^{k} a_{n_i} > 2 - a_{m_1} - \sum_{i=1}^{k_1} a_{n_i}. \tag{$**$}$$

On pose $E = \{k \in \mathbb{N} \mid k > k_1 \text{ et } (**) \text{ est vraie}\}$. Par ce qui précède, E est non vide. Par le principe du bon ordre, le minimum de E est atteint. On pose $k_2 = \min E$. Puisque $k_2 \in E$, on a $k_2 > k_1$.

$iii)$ Ce la même idée qu'au $ii)$. Puisque $\sum_{i \geq k_{p-1}+1}^{\infty} a_{n+i} = \infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $k \geq N$, alors

$$\sum_{i=k_{p-1}+1}^{k} a_{n_i} > p - \sum_{\ell=1}^{p-1} \left(\sum_{i=k_{\ell-1}+1}^{k_\ell} a_{n_i} + a_{m_\ell} \right). \tag{$***$}$$

Soit $E = \{k \in \mathbb{N} \mid k > k_{p-1} \text{ et } (***) \text{ est vraie}\}$. Par ce qui précède, E est non vide. Par le principe du bon ordre, E atteint son minimum. On pose $k_p = \min E$. Puisque $k_p \in E$, on a $k_p > k_{p-1}$.

Après avoir choisi $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$, on obtient un réarrangement de $\sum a_n$ en posant

$$f(k) = \begin{cases} n_{k-\ell}, & \text{s'il existe } \ell \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ tel que } k_\ell + \ell < k \leq k_{\ell+1} + \ell, \\ m_\ell, & \text{s'il existe } \ell \in \mathbb{N} \text{ tel que } k = k_\ell + \ell. \end{cases}$$

Cette fonction est une bijection de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et donc $\sum a_{f(n)}$ est un réarrangement de $\sum a_n$.

On montre maintenant que la suite (s_n) des sommes partielles de $\sum a_{f(n)}$ tend vers $+\infty$. Puisque $\sum a_{m_i}$ converge, on sait que $a_{m_i} \to 0$ lorsque $i \to \infty$. Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m_i \geq N$, on a $|a_{m_i}| < \frac{1}{2}$. Si $n \geq \max\{N, k_p + p\}$, alors par construction, on a $s_n \geq p - \frac{1}{2}$. Si $p \to \infty$, alors $k_p \to \infty$ et $n \to \infty$, et donc $s = \infty$.

Pour construire un réarrangement qui tend vers $-\infty$, il faut intervertir les rôles des n_i et des m_i et échanger le sens des inégalités dans les équations $(*)$, $(**)$ et $(***)$.

c) Soit $r \in \mathbb{R}$. On pose $k_0 := 0$ et $\ell_0 := 0$.

i) Montrer qu'il existe k_1 tel que
$$\sum_{i=1}^{k_1} a_{n_i} > r.$$

ii) Montrer qu'il existe ℓ_1 tel que
$$\sum_{i=1}^{k_1} a_{n_i} + \sum_{i=1}^{\ell_1} a_{m_i} < r.$$

iii) Pour $p \geq 2$, montrer que si k_{p-1} et ℓ_{p-1} sont déterminés, alors il existe des plus petits k_p et ℓ_p tels que $k_p > k_{p-1}$, $\ell_p > \ell_{p-1}$ et tels qu'on a
$$\sum_{j=1}^{p-1} \left(\sum_{i=k_{j-1}+1}^{k_j} a_{n_i} + \sum_{i=\ell_{j-1}+1}^{\ell_k} a_{m_i} \right) + \sum_{i=k_{p-1}+1}^{k_p} a_{n_i} > r$$
et
$$\sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{i=k_{j-1}+1}^{k_j} a_{n_i} + \sum_{i=\ell_{j-1}+1}^{\ell_k} a_{m_i} \right) < r.$$

iv) Montrer que ce réarrangement converge vers r.

Solution. c) *i*) C'est simplement parce que $\sum a_{n_i} = \infty$. Voir le b)i).

ii) C'est parce que $\sum a_{m_i} = -\infty$. Voir le b)i).

iii) Mêmes idées qu'au c)i), c)ii) b).

iv) On pose
$$f(k) = \begin{cases} n_{k-\ell_j}, & \text{s'il existe } j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ tel que } k_j + \ell_j < k \leq k_{j+1} + \ell_j, \\ m_{k-k_{j+1}}, & \text{s'il existe } j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ tel que } k_{j+1} + \ell_j < k \leq k_{j+1} + \ell_{j+1}. \end{cases}$$

C'est une bijection, donc $\sum a_{f(n)}$ est un réarrangement de $\sum a_n$. On montre que la suite (s_n) des sommes partielles du réarrangement converge vers r. D'abord, on voit $r < s_{k_p+\ell_p-1}$, par construction de ℓ_p, et donc $r + a_{m_{\ell_p}} < s_{k_p+\ell_p} < r$. De plus, on a $s_{k_{p+1}+\ell_p-1} < r$ par construction de k_{p+1}, et donc $r < s_{k_{p+1}+\ell_p} < r + a_{n_{k_{p+1}}}$. Pour n tel que $k_p + \ell_p \leq n \leq k_{p+1} + \ell_p$, on a donc $r + a_{m_{\ell_p}} < s_n < r + a_{n_{k_{p+1}}}$. Il suit que lorsque $n \to \infty$, alors $p \to \infty$ et donc $a_{m_{\ell_p}} \to 0$ et $a_{n_{k_{p+1}}} \to 0$. On conclut que $s = r$.