# Analyse 1

## Série 4

### Séries

## 1. Notions de base

**Exercice 1.** Montrer que les séries suivantes divergent.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$ b) $\displaystyle\sum_{n=10}^{\infty} \sqrt[n]{n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=31}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$ d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2}$

**Exercice 2.** Soit $(a_n)$ une suite. On pose $s = \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $(a_n)$ pour que $s$ converge.

**Exercice 3.** Soit $m \in \mathbb{N}$ et $|r| < 1$. On considère la série $s = \displaystyle\sum_{n=m}^{\infty} r^n$. Montrer que $s = \frac{r^m}{1-r}$.

**Exercice 4.** Pour chaque série, calculer sa valeur si elle converge.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{n!}$ c) $\displaystyle\sum_{n=2000}^{\infty} \frac{1}{3^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2+n}\right)$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n^2+2n}\right)$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{(-1)^n}{2^n} \right\rfloor$

**Exercice 5.** Soit $s = \sum a_n$ une série. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents.

a) $s$ converge;

b) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, alors

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty} a_n\right| < \varepsilon;$$

c) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n, m \geq N$ avec $n \leq m$, alors

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_n\right| < \varepsilon.$$

**Exercice 6.** Soit $s = \sum (-1)^n$ et soit $(s_n)$ la suite des sommes partielles. On voit que

$$s_{2n} = \underbrace{(-1+1) + (-1+1) + \cdots (-1+1)}_{n \text{ blocs}} = 0$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc que $s = \lim_{n\to\infty} s_{2n} = 0$. Où est l'erreur ?

**Exercice 7.** Soit $(a_n)$ une suite. Soit $s = \sum a_n$ une série et $(s_n)$ la suite des sommes partielles de $s$. Montrer que si $s$ converge vers $L$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_1 + s_2 + \cdots s_n}{n} = L.$$

**Exercice 8†.** Soit $(a_n)$ une suite positive, $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série et $(s_n)$ la suite des sommes partielles de $s$. On suppose que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_1 + \cdots s_n}{n}$$

converge (voir l'exercice 7). Montrer que si $(na_n)$ est bornée, alors la série $s$ converge.
*Indice*. Si $t_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} s_k$, alors montrez d'abord que $s_n - \frac{n}{n+1} t_n$ est bornée.

# 2. Séries à termes positifs

**Exercice 9.** Déterminer la nature des séries suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n+14}$ c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{n^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+17}$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$, $a > 0$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3}{5^n+7}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$ i) $\displaystyle\sum_{n=\lfloor |a| \rfloor+1}^{\infty} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n$, $a \in \mathbb{R}$

*Suggestion pour le c)*. Montrer que $\frac{1}{n!} \leq \frac{n!}{n^n}$.

**Exercice 10.** Soit $(a_n)$ une suite telle que $n^2 a_n \to 0$. Montrer que $\sum a_n$ converge.

**Exercice 11.** Montrer que la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ converge et calculer sa valeur.

*Indice*. Utilisez le fait que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

**Exercice 12. Sommation par partie.** Soit $(a_n)$ et $(b_n)$ deux suites. Soit $s = \sum a_n$ et $(s_n)$ la suite de ses sommes partielles, avec $s_0 := 0$. Montrer que pour $n < m$, on a

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k = \big(s_m b_{m+1} - s_n b_{n+1}\big) - \sum_{k=n+1}^{m} s_k (b_{k+1} - b_k).$$

*Remarque.* Si vous pensez au symbole de sommation $\sum$ comme au symbole d'intégrale, à $s_n$ comme à une primitive de $a_n$ et à $(b_{k+1} - b_k)$ comme à une dérivée de $b_k$, on constate que cette formule est analogue à l'intégration par partie, où $n$ et $m$ jouent le rôle des bornes.

**Exercice 13. Lemme d'Abel.** Soit $(b_n)$ une suite décroissante et positive. Soit $(a_n)$ une suite pour laquelle il existe $m, M$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$m \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq M.$$

Montrer que

$$b_1 m \leq a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \leq b_1 M.$$

**Exercice 14. Critère de Dirichlet.** Soit $s = \sum a_n b_n$. On pose $(t_n)$ la suite des sommes partielles de $\sum a_n$. Montrer que si $(t_n)$ est bornée et si $b \downarrow 0$, alors $s$ converge.

# 3. Séries alternées

**Exercice 15.** Déterminer la nature des séries suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{2^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n+1}}{n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 2^{n-k}$

**Exercice 16.** Soit $(a_n)$ la suite définie par $a_n = \frac{1}{n}$. Soit $s = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ la série harmonique alternée. On pose $m_0 := 0$.

a) Montrer qu'il existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{k=1}^{m_1} a_{2k-1} > 1.$$

b) Montrer qu'il existe $m_2 \in \mathbb{N}$ tel que $m_2 > m_1$ et

$$\sum_{k=1}^{m_1} a_{2k-1} - a_2 + \sum_{k=m_1+1}^{m_2} a_{2k-1} > 2.$$

c) Pour $\ell \geq 2$ entier, montrer qu'il existe $m_\ell > m_{\ell-1}$ et

$$\sum_{k=1}^{m_1} a_{2k-1} - a_2 + \sum_{k=m_1+1}^{m_2} a_{2k-1} - a_4 + \cdots + \sum_{k=m_{\ell-1}+1}^{m_\ell} a_{2k-1} > \ell.$$

d) Déduire que la série

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \left( \sum_{k=m_{\ell-1}+1}^{m_\ell} a_{2k-1} - a_{2\ell} \right) = +\infty.$$

*Remarque*. Ce numéro illustre un *réarrangement* de la série harmonique qui diverge. Autrement dit, en changeant l'ordre dans lequel on additionne les termes de la somme, on trouve un limite différente. Cela est seulement possible pour les séries conditionnellement convergentes. Comparer avec l'exercice 29.

# 4. Convergence absolue

**Exercice 17.** Déterminer la nature des séries suivantes. (Absolument convergente, conditionnellement convergente, divergente.)

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{n}{2} - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \frac{1}{4}}{n}$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \big(n - (-1)^n n\big)$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-n)^n}{n^n}$

**Exercice 18.** Soit $s = \sum a_n$ une série convergente. Montrer que s'il existe $0 \leq M < 1$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $|a_{n+1}| \leq M|a_n|$ pour tout $n \geq N$, alors

$$|s - s_n| \leq \frac{M}{1-M}|a_n| \qquad \text{pour tout } n \geq N,$$

où $(s_n)$ est la suite des sommes partielles de $s$.

**Exercice 19.** Soit $s = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

a) Montrer que $s$ est conditionnellement convergente.

b) Donner l'expression du produit de Cauchy de $s$ avec elle-même.

c) Montrer que ce produit diverge.
*Indice*. Si le produit de Cauchy s'écrit $s * s = \sum c_n$, alors montrez que $|c_n| \geq \frac{1}{2}$. Pour ce faire, montrez que $(n-k+1)(k+1) \leq (n+1)^2$ lorsque $n \geq k$.

**Exercice 20.** Montrer que $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\right)^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

**Exercice 21.** Soit $|r| < 1$. Montrer que $\frac{1}{(1-r)^2} = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n\right)^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) r^n$.

# 5. Séries entières

**Exercice 22[†].** Fonction génératrice de la suite de Fibonacci. Soit $a_0 := 0$ et $a_1 := 1$. Pour $n \geq 1$, on pose $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Soit la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Déterminer son rayon de convergence.

**Exercice 23.** Fonction exponentielle. Montrer que le rayon de convergence de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ est infini.

On définit $\exp(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

**Exercice 24.** Propriétés de la fonction exponentielle. Montrer les propriétés suivantes de la fonction exponentielle.

a) $\exp(0) = 1$.

b) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

d) Pour tout $q \in \mathbb{Q}$, on a $\exp(q) = e^q$.

e) La fonction exp est strictement croissante : si $x < y$, alors $\exp(x) < \exp(y)$.

f)[†] Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $N \in \mathbb{N}$ est tel que $|x| < 2N + 1$, alors

$$\sum_{n=0}^{2N-1} \frac{x^n}{n!} \leq \exp(x) \leq \sum_{n=0}^{2N} \frac{|x|^n}{n!} + \frac{|x|^{2N+1}}{(2N)!\,(2N+1-|x|)}.$$

g) La fonction exp est continue en 0. Déduire qu'elle est continue en tout point.

h) La fonction $\exp\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ est bijective.

*Indices*. Pour le b), pensez à utiliser le produit de Cauchy et la formule du binôme. Pour le d), commencez par les cas $q \in \mathbb{N}$ et $q = \frac{1}{n}$, où $n \in \mathbb{N}$. Pour le e), commencez par le cas $0 \leq x < y$. Faites les autres cas à l'aide du c).

**Exercice 25.** Trouver une série entière pour exprimer les fonctions suivantes pour $|x| < 1$.

a) $\frac{1}{1-x^2}$ b) $\frac{1}{(1-x)^2}$ c) $\frac{1+x}{1-x}$

## 6. Autre

Pour cette section, on tient pour acquis l'existence de la fonction logarithmique en base $e$. On tient pour acquis que $\log\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ est telle que $\log(xy) = \log x + \log y$, $\log x^y = y \log x$, log est strictement croissante et $\log e = 1$.

**Exercice 26.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer pour quelles valeurs de $\alpha$ la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$ converge.
Attention, on ne peut pas utiliser le critère de l'intégrale!

**Exercice 27.** Pour cet exercice, on tient pour acquis l'existence et les propriétés des fonctions transcendantes usuelles (sin, cos, tan, exp, log, etc.). Déterminer la nature des séries suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos(a_n)$, où $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n}{n+1}\right)$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \cos n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$

**Exercice 28.** Soit $(a_n)$ la suite dont le terme général est $a_n = \frac{n}{n+1} + \frac{n}{n+4} + \frac{n}{n+4^2} + \cdots + \frac{n}{n+4^n}$.

a) Montrer que $(a_n)$ vérifie
$$a_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n}{n+4^k} \tag{$*$}$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que $a_n \geq \frac{n}{n+1} + \frac{1}{3}$

**Exercice 29**[†]**. Théorème de Riemann.** (Facultatif) Montrer que si $\sum a_n$ est conditionnellement convergente, alors pour tout $r \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, il existe un réarrangement $\sum b_n$ de $\sum a_n$ tel que $\sum b_n = r$, en suivant ces étapes.

a) Soit $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ la suite des indices tels que $a_{n_k} \geq 0$ et soit $m_1 < m_2 < m_3 < \cdots$ la suite des indices tels que que $a_{m_k} < 0$. Montrer que $\sum a_{n_i} = \infty$ et $\sum a_{m_i} = -\infty$.

b) Soit $r = \infty$. On pose $k_0 := 0$.

   *i*) Montrer qu'il existe un plus petit $k_1$ tel que
$$\sum_{i=1}^{k_1} a_{n_i} > 1.$$

*ii*) Montrer qu'il existe un plus petit $k_2 > k_1$ tel que

$$\sum_{i=1}^{k_1} a_{n_i} + a_{m_1} + \sum_{i=k_1+1}^{k_2} a_{n_i} > 2.$$

*iii*) Pour $p \geq 2$, montrer que si $k_{p-1}$ a été déterminé à l'étape précédente, alors il existe $k_p > k_{p-1}$ tel que

$$\sum_{\ell=1}^{p-1} \left( \sum_{i=k_{\ell-1}+1}^{k_\ell} a_{n_i} + a_{m_\ell} \right) + \sum_{i=k_{p-1}+1}^{k_p} a_{n_i} > p.$$

Déduire que cela donne un réarrangement qui tend vers $+\infty$. Expliquer comment trouver une réarrangement qui tend vers $-\infty$.

c) Soit $r \in \mathbb{R}$. On pose $k_0 := 0$ et $\ell_0 := 0$.

*i*) Montrer qu'il existe $k_1$ tel que

$$\sum_{i=1}^{k_1} a_{n_i} > r.$$

*ii*) Montrer qu'il existe $\ell_1$ tel que

$$\sum_{i=1}^{k_1} a_{n_i} + \sum_{i=1}^{\ell_1} a_{m_i} < r.$$

*iii*) Pour $p \geq 2$, montrer que si $k_{p-1}$ et $\ell_{p-1}$ sont déterminés, alors il existe des plus petits $k_p$ et $\ell_p$ tels que $k_p > k_{p-1}$, $\ell_p > \ell_{p-1}$ et tels qu'on a

$$\sum_{j=1}^{p-1} \left( \sum_{i=k_{j-1}+1}^{k_j} a_{n_i} + \sum_{i=\ell_{j-1}+1}^{\ell_k} a_{m_i} \right) + \sum_{i=k_{p-1}+1}^{k_p} a_{n_i} > r$$

et

$$\sum_{j=1}^{p} \left( \sum_{i=k_{j-1}+1}^{k_j} a_{n_i} + \sum_{i=\ell_{j-1}+1}^{\ell_k} a_{m_i} \right) < r.$$

*iv*) Montrer que ce réarrangement converge vers $r$.