# Analyse 1

## Série 3

### Continuité (solutionnaire)

## 1. Limites de fonctions

**Exercice 1.** Calculer les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\sqrt{x^2+7}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$ e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x),\quad \text{où } f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{si } x\geq 0,\\ \dfrac{x+1}{2x^2+x-1}, & \text{si } x<0\end{cases}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x),\quad \text{où } f(x)=\begin{cases} \sqrt{x-1}, & \text{si } x\geq 1,\\ \sqrt{1-x}, & \text{si } x<1\end{cases}$

**Solution.** c) On a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(1-\frac{1}{x})}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{(1-\frac{1}{x})}\\ &= \frac{\sqrt{1+0}}{1-0}=1.\end{aligned}$$

d) On a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} &= \lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\sqrt{x}}\\ &= \frac{1}{1+\sqrt{1}}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

f) On a

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-1+x^2}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{(1+\sqrt{1-x^2})}\\
&= \frac{1}{(1+\sqrt{1-0})} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

g) On calcule les limites à droite et à gauche. Pour la limite à droite, on a

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x+1) = 1.$$

Pour la limite à gauche, on a

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x+1}{2x^2+x-1} = \frac{0+1}{0+0-1} = -1.$$

Ainsi, la limite n'existe pas.

**Exercice 2.** Montrer que la limite lorsque $x \to 1$ de $\left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right)$ tend vers $-1$.

**Exercice 3.** Déterminer le domaine de la fonction $f(x) := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{nx}$.

**Solution.** D'abord, il faut que $x \geq 0$, sinon $\sqrt[n]{x}$ n'est pas définie pour $n$ pair. Si $x = 0$, alors il est clair que $f(0) = 0$. Ensuite, si $x > 0$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{nx} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{x} = 1.$$

Ainsi, le domaine de la fonction est $[0, \infty)$.

**Exercice 4.** Soit $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ deux fonctions et soit $a \in \overline{D}$.

a) Trouver un exemple pour lequel $\lim_{x\to a} \big(f(x) + g(x)\big)$ existe, mais $\lim_{x\to a} f(x)$ ou $\lim_{x\to a} g(x)$ n'existe pas.

b) Si $\lim_{x\to a} \big(f(x) + g(x)\big)$ et $\lim_{x\to a} \big(f(x) - g(x)\big)$ existent, peut-on conclure que $\lim_{x\to a} f(x)$ et $\lim_{x\to a} g(x)$ existent ?

**Exercice 5.** Soit $D \subseteq \mathbb{R}$, $a \in D$ et $f\colon D \to \mathbb{R}$.

a) Montrer que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ si et seulement si $\lim_{x\to a} \Big(f(x) - L\Big) = 0$.

b) Montrer que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x+a)$.

c) On suppose que $a = 0 \in D$. Montrer que $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x^3)$.

**Solution.** b) On suppose que $\lim_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D$ tel que $|x-a| < \delta$, on a $|f(x) - L| < \varepsilon$. Or, si on pose $y = x - a$, alors $x = y + a$. En substituant, on trouve $|y| < \delta$ et $|f(y+a) - L| < \varepsilon$. Autrement dit, on a montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $y + a \in D$ et $|y| < \delta$, alors $|f(y+a) - a| < \varepsilon$, d'où $\lim_{y\to 0} f(y+a) = L$.

Le cas où $\lim_{x\to 0} f(x+a)$ converge se fait de la même façon. Les cas où l'une ou l'autre tend vers $\pm\infty$ sont semblables. Enfin, le cas où l'une ou l'autre diverge est aussi semblable.

**Exercice 6.** Calculer la limite de $\frac{\lfloor x\rfloor - x}{x}$ lorsque $x \to 0$, si elle existe.

**Exercice 7.** a) Calculer $\lim_{y\to 0^+} \sup_{[0,y]} \lfloor x \rfloor$.

b) Calculer $\lim_{y\to 0^+} \inf_{[0,y]} \lfloor x \rfloor$

c) Les limites calculées au a) et au b) sont-elles égales ?

**Exercice 8.** Soit $f, g\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ deux fonctions. Montrer que si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{existe,}$$

alors il existe $C \geq 0$ et $R > 0$ tels que pour tout $x \geq R$, on a $f(x) \leq Cg(x)$. (Dans ce cas, on dit parfois que $f(x)$ est un $O\big(g(x)\big)$, qui se lit « $f(x)$ est un grand O de $g(x)$ ». C'est une notation que vous avez peut-être déjà vu, par exemple en informatique.)

*Remarque.* L'hypothèse que la limite de $\frac{f(x)}{g(x)}$ existe lorsque $x \to \infty$ impose la condition tacite qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \geq M$, on a $g(x) \neq 0$, sans quoi, le quotient pourrait ne pas être défini et la limite n'aurait donc pas de sens.

# 2. Fonctions continues en un point

**Exercice 9.** a) Soit $f$ une fonction qui est telle que $|f(x)| \leq |x|$ pour tout $x$. Montrer que $f$ est continue en 0.

b) Soit $g$ une fonction telle que $g(0) = 0$ et $g$ est continue en 0. Montrer que si $|f(x)| \leq |g(x)|$, alors $f$ est continue en 0.

**Exercice 10.** a) Montrer que $f(x) = \max\{0, x\}^2$ est continue en 0.

b) La fonction possède-t-elle des points de discontinuité ?

**Solution.** a) On calcule les limites à droite et à gauche. D'abord, on a

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 = 0.$$

Ensuite, on a

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 0 = 0.$$

Ainsi, il suit que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$. Enfin, on a bien $f(0) = 0$, d'où $f$ est continue en 0.

**Exercice 11.** Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $c$ et $h > 0$ tels que $c \in I$ et $c + h \in I$. Montrer que si $f$ est continue en $c$, alors

$$\lim_{h \to 0^+} \sup_{[c, c+h]} f(x) = f(c).$$

**Exercice 12.** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on ait $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Montrer que si $f$ est continue en 0, alors $f$ est continue en $a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

**Solution.** Soit $a \in \mathbb{R}$. On voit que

$$\lim_{h \to 0} f(a + h) = \lim_{h \to 0} \big(f(a) + f(h)\big) = f(a) + f(0).$$

Ainsi, il suffit de montrer que $f(0) = 0$. Cela suit simplement du fait que $f(0 + 0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$. Comme $f(0) = 2f(0)$, on conclut que $f(0) = 0$.

Conclusion : on a $\lim_{h \to 0} f(a + h) = f(a)$, d'où $f$ est continue en $a$.

**Exercice 13.** Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Soit $a \in I$ un point et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue en $a$. Montrer que si $f(a) \neq 0$, alors il existe $r > 0$ tel que $(a - r, a + r) \subseteq I$ et $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in (a - r, a + r)$.

**Exercice 14.** Soit $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$.

a) Quel est le plus grand domaine de définition de $f$ ? Montrer que $f$ est continue sur ce domaine.

b) Existe-t-il un prolongement continue en 1 ?

**Solution.** b) Si la limite lorsque $x \to 1$ de $f(x)$ existe, alors il sera possible de prolonger $f$ est une fonction continue en 1.

On a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Le prolongement de $f$ est une fonction $\tilde{f}$ définie par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}, & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\{1\},\\ \frac{1}{2}, & \text{si } x = 1,\end{cases}$$

qui est continue en 1.

# 3. Fonctions continues sur un intervalle

**Exercice 15.** Soit $a < b < c$. Soit $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ et $h\colon [b,c] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On pose

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{si } x \in [a,b],\\ h(x), & \text{si } x \in (b,c].\end{cases}$$

Sous quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on que $f$ est continue ?

**Exercice 16.** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,$$

alors $f$ possède au moins un zéro.

**Solution.** Puisque $f(x) \to -\infty$ lorsque $x \to -\infty$, il existe $M < 0$ tel que si $x < M$, alors $f(x) < -1$. Puisque $f(x) \to \infty$ lorsque $x \to \infty$, il existe $N > 0$ tel que si $x > N$, alors $f(x) > 1$. Ainsi, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $y \in [M,N]$ tel que $f(y) = 0$.

**Exercice 17.** Montrer que les fonctions suivantes ont au moins un zéro. Donner une approximation d'une des racines à au plus $\frac{1}{2}$.

a) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 2$

b) $f(x) = \frac{1}{x} - 4x + x^2$, avec $x > 0$

**Exercice 18.** Soit $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^2$. Calculer $\sup_{(-1,1)} f(x)$ et $\inf_{(-1,1)} f(x)$. Est-ce que $f$ atteint son maximum ? Son minimum ? Cela contredit-il le théorème vu en classe sur le maximum et le minimum de $f$ ?

**Solution.** D'abord, on voit que $f(0) = 0$ et que $f(x) \geq 0$ pour tout $x$. Ensuite, pour $(x_n)$ une suite de $(-1,1)$ telle que $x_n \to 1$, on a que $f(x_n) \to 1$, car $f$ est continue. Ainsi, pour tout $z \in [0,1)$, il existe $x_n$ tel que $0 \leq z < f(x_n)$ et par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x$ tel que $f(x) = z$. On conclut que $f\big((-1,1)\big) = [0,1)$. Il suit que $\sup_{x\in(-1,1)} f(x) = \sup[0,1) = 1$.

Puisque pour tout $f(x) < 1$ pour tout $x \in (-1,1)$, on conclut que $f$ n'a pas de maximum.

On voit que l'infimum est 0. Puisque $f(0) = 0$, $f$ possède un minimum qui est atteint en $x = 0$.

**Exercice 19.** Soit $f\colon [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Montrer que $f$ possède un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe un $x$ tel que $f(x) = x$.
*Indice.* Utilisez le théorème des valeurs intermédiaires.

**Solution.** Si $f(0) = 0$ ou $f(1) = 1$, alors $f$ possède un point fixe. Ainsi, on suppose que $f(0) > 0$ et que $f(1) < 1$. On pose $g(x) = f(x) - x$. On a que $g(0) = f(0) > 0$ et que $g(1) = f(1) - 1 < 0$. Ainsi, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $z \in (0,1)$ tel que $g(z) = 0$, c'est-à-dire que $f(z) - z = 0$ et donc que $f(z) = z$.

**Exercice 20.** Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Soit $E \subseteq D$ un sous-ensemble dense dans $D$. Montrer que si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in E$, alors $f = g$ sur $D$.

**Solution.** Soit $y \in D$. Puisque $E$ est dense dans $D$, il existe une suite $(x_n)$ dans $E$ telle que $x_n \to y$ lorsque $n \to \infty$. Ainsi, on a $f(x_n) = g(x_n)$, car $x_n \in E$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque $f$ et $g$ sont continues, si on laisse $n \to \infty$, on obtient $f(y) = g(y)$. Comme $y$ était arbitraire, on a bien $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in D$.

**Exercice 21.** Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$. Soit $K \in (0,\infty)$ un nombre tel que pour tout $x, y \in D$, on ait

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Montrer que $f$ est uniformément continue.

**Solution.** Soit $\varepsilon > 0$. Il suffit de prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$.

**Exercice 22.** Soit $I = (a,b)$ un intervalle. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $c$ tel que $a < c < b$. Montrer que si $f$ est uniformément continue sur $(a,c]$ et sur $[c,b)$, alors $f$ est uniformément continue sur $(a,b)$.

**Solution.** Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $x, y \in (a,c]$, si $|x - y| < \delta_1$, alors $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. De même, il existe $\delta_2$ tel que pour tout $x, y \in [c,b)$, si $|x - y| < \delta_2$, alors $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

On pose $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Soit $x, y \in (a,b)$ tels que $|x - y| < \delta$. Si $x, y \in (a,c]$ ou si $x, y \in [c,b)$, alors on a que $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, car $\delta \leq \delta_1$ et $\delta \leq \delta_2$.

Pour le dernier cas, on peut supposer sans perte de généralité que $x < c < y$. Dans ce cas, on a $|x - c| < |x - y| < \delta_1$ et $|y - c| < |x - y| < \delta_2$. Il suit que

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(c)| + |f(c) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On conclut que $f$ est uniformément continue sur $(a, b)$.

**Exercice 23.** Soit $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Soit $x \in [a, b]$ et soit $(x_n)$ une suite de $(a, b)$ qui converge vers $x$.

a) Montrer que $(f(x_n))$ est une suite de Cauchy.

b) Montrer que $f$ se prolonge continûment sur $[a, b]$.

**Exercice 24.** Montrer que $f(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $(0, 1]$.
*Indice.* Utilisez le numéro précédent.

**Solution.** Puisque $f(x) \to \infty$ lorsque $x \to 0^+$, il est impossible de prolonger continûment $f$ sur $[0, 1$, donc $f$ n'est pas uniformément continue sur $(0, 1]$.

De façon général, si une fonction $f\colon (a, b] \to \mathbb{R}$ possède une asymptote verticale en $a$, alors elle n'est assurément pas uniformément continue.

# 4. Autre

Dans cette section seulement, on suppose que les fonctions exponentielle et logarithme et les fonctions trigonométriques sont définies et continues. On tient pour acquis leurs propriétés habituelles. (Par exemples, les identités trigonométriques, le fait que exp et log sont strictement croissantes, le fait que $|\sin x| \leq 1$, etc.) On ne peut pas dériver ni intégrer ces fonctions.

**Exercice 25.** Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que $f$ est continue.

**Exercice 26.** On considère l'énoncé suivant.

> *Soit $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et continue sur $(a, b)$. Alors $f$ est uniformément continue.*

a) Cet énoncé est-il vrai ou faux ? Sans tenter de la résoudre rigoureusement, essayez de vous convaincre d'un côté ou de l'autre.

b)$^\dagger$ Montrer que $f$, définie par $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $(0, 1)$, n'est pas uniformément continue sur $(0, 1)$.

c) Quelle est réponse du a) ?

**Solution.** b) Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}$. On pose $x_k = \frac{1}{2\pi k + \frac{\pi}{2}}$ et $y_k = \frac{1}{2\pi k + \frac{3\pi}{2}}$. Pour tout $\delta > 0$, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $|x_K - y_K| < \delta$, car $(x_k - y_k) \to 0$ lorsque $k \to \infty$. De plus, on voit que

$$|f(x_k) - f(y_k)| = \left|\sin\left(2\pi k + \tfrac{\pi}{2}\right) - \sin\left(2\pi k + \tfrac{3\pi}{2}\right)\right| = |1 - (-1)| = 2 > \varepsilon.$$

Il suit que $f$ n'est pas uniformément continue sur $[0, 1]$.

c) La réponse est non. L'énoncé est faux, puisque la fonction $f$ du b) en est un contre-exemple.

**Exercice 27.** Montrer que $f(x) = e^x + \log x$ possède au moins un zéro. Donner une approximation de la racine à au plus $\frac{1}{2}$. (Remarque : log est logarithme naturel, c'est-à-dire $\log := \ln := \log_e$.)

**Exercice 28.** Déterminer si les fonctions suivantes sont uniformément continues.

a) $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $(0, 1)$

b) $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $(0, 1]$

c) $f(x) = e^x$ sur $\mathbb{R}$