Analyse 1

Série 3

Continuité

1. Limites de fonctions

Exercice 1. Calculer les limites suivantes.

a) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$ b) $\lim_{x\to 3} \sqrt{x^2+7}$ c) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$

d) $\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$ e) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$ f) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

g) $\lim_{x\to 0} f(x), \quad$ où $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si } x \geq 0, \\ \dfrac{x+1}{2x^2+x-1}, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

h) $\lim_{x\to 1} f(x), \quad$ où $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}, & \text{si } x \geq 1, \\ \sqrt{1-x}, & \text{si } x < 1 \end{cases}$

Exercice 2. Montrer que la limite lorsque $x \to 1$ de $\left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right)$ tend vers -1.

Exercice 3. Déterminer le domaine de la fonction $f(x) := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{nx}$.

Exercice 4. Soit $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ deux fonctions et soit $a \in \overline{D}$.

a) Trouver un exemple pour lequel $\lim_{x\to a} \big(f(x) + g(x)\big)$ existe, mais $\lim_{x\to a} f(x)$ ou $\lim_{x\to a} g(x)$ n'existe pas.

b) Si $\lim_{x\to a} \big(f(x) + g(x)\big)$ et $\lim_{x\to a} \big(f(x) - g(x)\big)$ existent, peut-on conclure que $\lim_{x\to a} f(x)$ et $\lim_{x\to a} g(x)$ existent ?

Exercice 5. Soit $D \subseteq \mathbb{R}$, $a \in D$ et $f\colon D \to \mathbb{R}$.

a) Montrer que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ si et seulement si $\lim_{x\to a} \Big(f(x) - L\Big) = 0$.

b) Montrer que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x+a)$.

c) On suppose que $a = 0 \in D$. Montrer que $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x^3)$.

Exercice 6. Calculer la limite de $\frac{\lfloor x \rfloor - x}{x}$ lorsque $x \to 0$, si elle existe.

Exercice 7. a) Calculer $\lim_{y \to 0^+} \sup_{[0,y]} \lfloor x \rfloor$.

b) Calculer $\lim_{y \to 0^+} \inf_{[0,y]} \lfloor x \rfloor$

c) Les limites calculées au a) et au b) sont-elles égales ?

Exercice 8. Soit $f, g\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ deux fonctions. Montrer que si

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ existe,}$$

alors il existe $C \geq 0$ et $R > 0$ tels que pour tout $x \geq R$, on a $f(x) \leq Cg(x)$. (Dans ce cas, on dit parfois que $f(x)$ est un $O\big(g(x)\big)$, qui se lit « $f(x)$ est un grand O de $g(x)$ ». C'est une notation que vous avez peut-être déjà vu, par exemple en informatique.)

Remarque. L'hypothèse que la limite de $\frac{f(x)}{g(x)}$ existe lorsque $x \to \infty$ impose la condition tacite qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \geq M$, on a $g(x) \neq 0$, sans quoi, le quotient pourrait ne pas être défini et la limite n'aurait donc pas de sens.

2. Fonctions continues en un point

Exercice 9. a) Soit f une fonction qui est telle que $|f(x)| \leq |x|$ pour tout x. Montrer que f est continue en 0.

b) Soit g une fonction telle que $g(0) = 0$ et g est continue en 0. Montrer que si $|f(x)| \leq |g(x)|$, alors f est continue en 0.

Exercice 10. a) Montrer que $f(x) = \max\{0, x\}^2$ est continue en 0.

b) La fonction possède-t-elle des points de discontinuité ?

Exercice 11. Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit c et $h > 0$ tels que $c \in I$ et $c + h \in I$. Montrer que si f est continue en c, alors

$$\lim_{h \to 0^+} \sup_{[c,c+h]} f(x) = f(c).$$

Exercice 12. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on ait $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Montrer que si f est continue en 0, alors f est continue en a pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 13. Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Soit $a \in I$ un point et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue en a. Montrer que si $f(a) \neq 0$, alors il existe $r > 0$ tel que $(a - r, a + r) \subseteq I$ et $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in (a - r, a + r)$.

Exercice 14. Soit $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

a) Quel est le plus grand domaine de définition de f ? Montrer que f est continue sur ce domaine.

b) Existe-t-il un prolongement continue en 1 ?

3. Fonctions continues sur un intervalle

Exercice 15. Soit $a < b < c$. Soit $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ et $h\colon [b,c] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On pose

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{si } x \in [a,b], \\ h(x), & \text{si } x \in (b,c]. \end{cases}$$

Sous quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on que f est continue ?

Exercice 16. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,$$

alors f possède au moins un zéro.

Exercice 17. Montrer que les fonctions suivantes ont au moins un zéro. Donner une approximation d'une des racines à au plus $\frac{1}{2}$.

a) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 2$

b) $f(x) = \frac{1}{x} - 4x + x^2$, avec $x > 0$

Exercice 18. Soit $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^2$. Calculer $\sup_{(-1,1)} f(x)$ et $\inf_{(-1,1)} f(x)$. Est-ce que f atteint son maximum ? Son minimum ? Cela contredit-il le théorème vu en classe sur le maximum et le minimum de f ?

Exercice 19. Soit $f\colon [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Montrer que f possède un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe un x tel que $f(x) = x$.
Indice. Utilisez le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 20. Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Soit $E \subseteq D$ un sous-ensemble dense dans D. Montrer que si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in E$, alors $f = g$ sur D.

Exercice 21. Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$. Soit $K \in (0,\infty)$ un nombre tel que pour tout $x, y \in D$, on ait

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 22. Soit $I = (a, b)$ un intervalle. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit c tel que $a < c < b$. Montrer que si f est uniformément continue sur $(a, c]$ et sur $[c, b)$, alors f est uniformément continue sur (a, b).

Exercice 23. Soit $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Soit $x \in [a, b]$ et soit (x_n) une suite de (a, b) qui converge vers x.

a) Montrer que $(f(x_n))$ est une suite de Cauchy.

b) Montrer que f se prolonge continûment sur $[a, b]$.

Exercice 24. Montrer que $f(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $(0, 1]$.
Indice. Utilisez le numéro précédent.

4. Autre

Dans cette section seulement, on suppose que les fonctions exponentielle et logarithme et les fonctions trigonométriques sont définies et continues. On tient pour acquis leurs propriétés habituelles. (Par exemples, les identités trigonométriques, le fait que exp et log sont strictement croissantes, le fait que $|\sin x| \leq 1$, etc.) On ne peut pas dériver ni intégrer ces fonctions.

Exercice 25. Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que f est continue.

Exercice 26. On considère l'énoncé suivant.

> *Soit $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et continue sur (a, b). Alors f est uniformément continue.*

a) Cet énoncé est-il vrai ou faux ? Sans tenter de la résoudre rigoureusement, essayez de vous convaincre d'un côté ou de l'autre.

b)† Montrer que f, définie par $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $(0, 1)$, n'est pas uniformément continue sur $(0, 1)$.

c) Quelle est réponse du a) ?

Exercice 27. Montrer que $f(x) = e^x + \log x$ possède au moins un zéro. Donner une approximation de la racine à au plus $\frac{1}{2}$. (Remarque : log est logarithme naturel, c'est-à-dire $\log := \ln := \log_e$.)

Exercice 28. Déterminer si les fonctions suivantes sont uniformément continues.

a) $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $(0, 1)$

b) $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $(0, 1]$

c) $f(x) = e^x$ sur $\mathbb{R}$