Analyse 1

Série 1

Nombres réels (solutionnaire)

Notation. Pour le cours, l'ensemble des naturels $\mathbb{N}$ ne contient pas 0. Ainsi, on écrit

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}.$$

On écrira $\mathbb{N} \cup \{0\}$ si l'on inclut 0.

1. Nombres rationnels

Exercice 1. Soit x, y deux nombres irrationnels.

a) Montrer que $x + y$ peut être rationnel ou irrationnel.

b) Montrer que xy peut être rationnel ou irrationnel.

Solution. a) Si on prend $x = \sqrt{2}$ et $y = -x$, alors x et y sont irrationnels, mais $x + y = 0$, qui est rationnel.

Si on prend $x = \sqrt{2}$ et $y = \sqrt{2}$, alors x et y sont irrationnels. Pour voir que $x + y$ est aussi irrationnel, on suppose le contraire, c'est-à-dire que $x + y = 2\sqrt{2}$ est rationnel, donc il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}$ tels que $2\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Dans ce cas, on a $\sqrt{2} = \frac{a}{2b}$ et il suit que $\sqrt{2}$ est rationnel, une contradiction.

b) On peut prendre $x = \sqrt{2}$ et $y = x$. Dans ce cas, on a x et y irrationnels et $xy = 2$ rationnel.

Ensuite, on prend $x = \sqrt{2}$ et $y = 1 + \sqrt{2}$. Il est clair que x est irrationnel. Ensuite, pour voir que y est irrationnel, on suppose par l'absurde qu'il est rationnel. Dans ce cas, on a $y - 1 = \sqrt{2}$ et donc $\sqrt{2}$ est rationnel, ce qui est une contradiction. Ainsi, x et y sont irrationnels et $xy = 2 + \sqrt{2}$ doit également être irrationnel. (On peut répéter le même argument que pour montrer que y était irrationnel.)

Exercice 2. Montrer qu'il n'existe pas de nombre rationnel dont le carré est 12.

Solution. On suppose le contraire, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$ tels que $\text{pgcd}(p, q) = 1$ et $\frac{p^2}{q^2} = 12$. Il suit que $p^2 = 12q^2$ et donc 12 divise p^2. On conclut que p^2 est pair et par le lemme vu en classe, p est pair. On a donc $p = 2d$, où $d \in \mathbb{Z}$.

On remplace dans l'équation de départ et on obtient $4d^2 = 12q^2$, donc $d^2 = 3q^2$. Il suit que 3 divise d^2. On montre que 3 divise d. On suppose le contraire, donc il existe $c, r \in Z$ tel que $d = 3d + r$, où $r \in \{1, 2\}$. On élève au carré et on obtient $d^2 = 9c^2 + 6cr + r^2 = 3(3c^2 + 2cr) + r^2$. Puisque $r^2 \in \{1, 4\}$, il suit que $3 \not| d^2$, ce qui est un contradiction.

On sait maintenant que 3 divise d, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $d = 3k$. On obtient $9k^2 = 3q^2$, c'est-à-dire $3k^2 = q^2$. Il s'ensuit que 3 divise q^2 et par ce qui a été montré, 3 divise donc q. On conclut que $\text{pgcd}(p,q) \geq 3$, ce qui est une contradiction. D'où $\sqrt{12}$ est irrationnel.

Exercice 3. Soit $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ un polynôme tel que $a_n \neq 0$ et a_j est un entier pour tout j. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un zéro de p, c'est-à-dire que $p(x_0) = 0$. Montrer que si $x_0 = \frac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ et $\text{pgcd}(p,q) = 1$, alors on a que $p|a_0$ et $q|a_n$.

Solution. D'une part, on a

$$\begin{aligned} a_n \frac{p^n}{q^n} + \cdots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0 \quad &\Rightarrow \quad a_n p^n + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0 \\ &\Rightarrow \quad p(a_n p^{n-1} + \cdots + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n. \end{aligned}$$

Ainsi, on voit que $p|a_0 q^n$. Or, p et q sont copremiers, donc il s'ensuit que $p|a_0$.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} a_n \frac{p^n}{q^n} + \cdots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0 \quad &\Rightarrow \quad a_n p^n + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0 \\ &\quad a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_0 q^n = -a_n p^n \\ &\quad q(a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_0 q^n) = -a_n p^n. \end{aligned}$$

On a donc que $q|a_n p^n$. Puisque que p et q sont copremiers, on conclut que $q|a_n$.

Exercice 4. Montrer que $\sqrt{2+\sqrt{5}}$ est irrationnel.

Indice. Trouvez un polynôme p dont les coefficients sont entiers et qui a $\sqrt{2+\sqrt{5}}$ comme zéro. Appliquez ensuite l'exercice précédent.

Solution. On pose $x = \sqrt{2+\sqrt{5}}$. On a

$$\begin{aligned} x^2 = 2 + \sqrt{5} \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - 2 = \sqrt{5} \\ &\Rightarrow \quad (x^2-2)^2 = 5 \\ &\Leftrightarrow \quad x^4 - 4x + 4 = 5 \\ &\Leftrightarrow \quad x^4 - 4x - 1 = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, on voit que le polynôme $p(x) = x^4 - 4x - 1$ possède $\sqrt{2+\sqrt{5}}$ comme zéro. Par le numéro précédent, si $\sqrt{2+\sqrt{5}} = \frac{p}{q}$ est un rationnel, alors on doit avoir $p|1$ et $q|1$, ce qui est seulement possible si $p = \pm 1$ et $q = 1$. Or, on a

$$\sqrt{2+\sqrt{5}} = 1 \quad \Rightarrow \quad 2 + \sqrt{5} = 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{5} = -1,$$

ce qui est impossible. On conclut que $\sqrt{2+\sqrt{5}}$ est irrationnel.

Exercice 5. Principe du bon ordre. Les nombres naturels possèdent la propriété suivante : tout ensemble $S \subseteq \mathbb{N}$ non vide contient un plus petit élément, autrement dit $\min S$ existe. Montrer le principe de récurrence à partir du principe du bon ordre : si $S \subseteq \mathbb{N}$ est tel que

i) $1 \in S$;
ii) si $k \in S$, alors $k+1 \in S$;
alors $S = \mathbb{N}$.
Suggestion. Démontrez que $B := \mathbb{N} \setminus S$ est vide.

Exercice 6. Montrer la formule suivante par récurrence :

$$1^2 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}$ et k un entier tel que $0 \leq k \leq n$. Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$, que l'on lit « k parmi n », est défini par

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

a) Montrer la *règle de Pascal* : si $1 \leq k \leq n$, alors

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

b) Montrer que $\binom{n}{k}$ est nécessairement un entier.

Exercice 8. Théorème du binôme. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer la formule du binôme :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Solution. On utilise le principe de récurrence. Le cas où $n = 1$ est clair. On suppose que la formule est vraie pour n et la montre pour $n+1$. On a

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k \qquad \text{(Indice } k \mapsto k+1\text{)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^{n-k+1} b^k \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n-k+1} b^k \qquad \text{(règle de Pascal)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n-k+1} b^k
\end{aligned}
$$

comme voulu.

2. Inégalités

Exercice 9. Montrer les propriétés suivantes de la valeur absolue.

a) $|x| \geq 0$

b) $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$

c) $|x| = |-x| = \max\{x, -x\}$

d) $|xy| = |x||y|$

e) $-|x| \leq x \leq |x|$

Exercice 10. Trouver tous les nombres $x \in \mathbb{R}$ qui vérifient les inégalités suivantes.

a) $x^2 + x + 1 > 3$

b) $\frac{x-1}{x+1} > 0$

c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0$

d) $\frac{2x+1}{x-1} \geq 3$

Solution. a) On a $x^2 + x - 2 > 0$. On voit que -2 et 1 sont les racines du polynôme, donc on veut $(x+2)(x-1) > 0$. Il suit que l'inégalité est vérifiée lorsque $x > -2$ et $x > 1$, donc $x \in (1, \infty)$, ou lorque $x < -2$ et $x < 1$, donc $x \in (-\infty, -2)$.

Conclusion : $x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

b) On veut $x - 1 > 0$ et $x + 1 > 0$, donc $x \in (1, \infty)$, ou on veut $x - 1 < 0$ et $x + 1 < 0$, donc $x \in (-\infty, -1)$.

Conclusion : $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

c) D'abord, on met sur le dénominateur commun :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} = \frac{1-x+x}{x(1-x)} = \frac{1}{x(1-x)}.$$

Ainsi, l'inégalité sera vérifiée si et seulement si $x(1-x) > 0$. Cela se produit si $x > 0$ et $x < 1$, donc $x \in (0, 1)$, ou si $x < 0$ et $x > 1$, ce qui est impossible.

Conclusion : $x \in (0,1)$.

Exercice 11. Si $0 < a < b$, montrer que $a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$.

Exercice 12. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, les inégalités suivantes sont vérifiées.

a) $x^2 + xy + y^2 \geq 0$ b) $3x^2 + 5xy + 3y^2 \geq 0$

Solution. a) On complète le carré $x^2 + xy$. On a

$$x^2 + xy = \left(x^2 + xy + \tfrac{y^2}{4}\right) - \tfrac{y^2}{4} = \left(x + \tfrac{y}{2}\right)^2 - \tfrac{y^2}{4}.$$

Il suit que

$$x^2 + xy + y^2 = \left(x + \tfrac{y}{2}\right)^2 - \tfrac{y^2}{4} + y^2 = \left(x + \tfrac{y}{2}\right)^2 + \tfrac{3y^2}{4} \geq 0.$$

Exercice 13. Soit $a, b, c > 0$. Montrer que les inégalités suivantes sont vraies.

a) $a^2 + b^2 > ab$ b) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$

Solution. b) La stratégie est de compléter le carré trois fois. On garde un $\frac{a^2}{2}$ de côté pour la fin. On a

$$\begin{aligned} a^2 - ab &= \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} - ab \\ &= \frac{a^2}{2} + \tfrac{1}{2}(a^2 - 2ab) \\ &= \frac{a^2}{2} + \tfrac{1}{2}(a-b)^2 - \tfrac{1}{2}b^2 \end{aligned}$$

et de façon similaire, on obtient

$$\begin{aligned} b^2 - bc &= \frac{b^2}{2} + \tfrac{1}{2}(b-c)^2 - \tfrac{1}{2}c^2, \\ c^2 - ac &= \frac{c^2}{2} + \tfrac{1}{2}(c-a)^2 - \tfrac{1}{2}a^2. \end{aligned}$$

En additionnant, on trouve

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac &= \tfrac{1}{2}(a-b)^2 + \tfrac{1}{2}(b-c)^2 + \tfrac{1}{2}(c-a)^2 \\ &\qquad + \tfrac{a^2}{2} + \tfrac{b^2}{2} + \tfrac{c^2}{2} - \tfrac{a^2}{2} - \tfrac{b^2}{2} - \tfrac{c^2}{2} \\ &= \tfrac{1}{2}(a-b)^2 + \tfrac{1}{2}(b-c)^2 + \tfrac{1}{2}(c-a)^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Exercice 14. Trouver les nombres réels qui vérifient les ingalités suivantes.

a) $|x-1|+|x+1|<1$

b) $|x-1|\cdot|x+2|\leq 3$

Solution. a) Si $x\leq -1$, alors l'inégalité devient

$$-(x-1)-(x+1)=-2x<1,$$

donc on veut $x>-\frac{1}{2}$, ce qui est impossible.

Ensuite, si $-1<x\leq 1$, alors l'inégalité devient

$$-(x-1)+(x+1)=2<1,$$

ce qui est impossible.

Enfin, si $x>1$, alors on a

$$(x-1)+(x+1)=2x<1,$$

donc il faut $x<\frac{1}{2}$, ce qui est impossible. Ainsi, il n'y a aucun $x\in\mathbb{R}$ qui vérifie l'inégalité.

Exercice 15. Soit $x,y\in\mathbb{R}$. Montrer que

$$\max\{x,y\}=\frac{x+y+|y-x|}{2}\quad\text{et}\quad\min\{x,y\}=\frac{x+y-|y-x|}{2}.$$

Exercice 16. Montrer que si $x\geq\frac{199}{200}$, alors on a $x^{100}\geq\frac{1}{2}$.

3. Supremum et infimum

Exercice 17. Soit A et B des ensembles tels que $\sup A$, $\sup B$, $\inf A$ et $\inf B$ existent. Montrer que si $A\subseteq B$, alors $\sup A\leq\sup B$ et $\inf A\geq\inf B$.

Solution. Puisque $\sup B$ existe, on sait que pour tout $x\in B$, on a $x\leq\sup B$. Or, par hypothèse, on a $A\subseteq B$, donc il suit que $x\leq\sup B$ pour tout $x\in A$. Cela signifie que $\sup B$ est un majorant de A. Puisque $\sup A$ existe et qu'il est le plus petit majorant, on a bien $\sup A\leq\sup B$.

L'inégalité pour les infimums se fait de la même manière.

Exercice 18. Déterminer au moins un majorant et un minorant pour chacun des ensembles suivants si possible, sinon montrer que l'ensemble ne possède pas de majorant ou de minorant.

a) $\{p\mid p\text{ est premier}\}$

b) $\{x^2-x\mid x\in\mathbb{R}\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} : |x-2| < 1\}$

d) $\left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{N},\ 0 < p < 10,\ 1 \le q < 100 \right\}$

e) $\left\{ \frac{1}{y} \,\middle|\, y \in (0,1) \right\}$

Solution. a) L'ensemble est minoré par 0, puisque tous les premiers sont des entiers positifs. Ensuite, on montre que l'ensemble n'est pas majoré On suppose qu'il existe M tel que pour tout premier p, on a $p \le M$. En particulier, il y a un nombre fini de nombres premiers, disons $p_1 < p_2 < \cdots p_n$. On pose $m = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$. Alors il est clair que p_j ne divise pas m pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Cela veut dire que m est un nombre premier, ce qui contredit le fait qu'il y en a n. D'où un tel M n'existe pas.

b) L'ensemble est minoré. En effet, si on complète le carré de $x^2 - x$, on trouve $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$. Ainsi, on peut prendre $-\frac{1}{4}$ comme minorant. En effet, on a

$$x^2 - x \ge -\frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x + \frac{1}{4} \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 \ge 0,$$

et cette dernière inégalité est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

L'ensemble n'est pas majoré. En effet, si M est un majorant, alors on a

$$M^2 - M \le M \quad \Rightarrow \quad M(M-2) \le 0$$

et donc $M \in [0, 2]$. Or, il est clair qu'un majorant doit être au moins égal à 6, car en $x = 3$, on a $x^2 - x = 9 - 3 = 6$. On a donc une contradiction, d'où un tel M n'existe pas.

e) L'ensemble est minoré, mais il n'est pas majoré. En effet, pour tout $y \in (0,1)$, on a que

$$\frac{1}{y} \ge 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 \ge y,$$

qui est vrai. Ainsi, 1 est un minorant.

Supposons que M est un majorant. On sait que $M > 0$, car $\frac{1}{y} \ge 0$. Il suit que $1 < 2M+1$, c'est-à-dire que $\frac{1}{2M+1} \in (0,1)$. En $y = \frac{1}{2M+1}$, on a

$$\frac{1}{1/(2M+1)} = 2M + 1 > M,$$

ce qui contredit le fait que M est un majorant, d'où l'ensemble n'est pas majoré.

Exercice 19. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $-\infty < a \le b < \infty$. Montrer que

a) $\sup[a,b] = b$

b) $\inf[a,b] = a$

c) $\sup(a,b) = b$

d) $\inf(a,b) = a$

Exercice 20. Trouver le supremum et l'infimum des ensembles suivants s'ils existent. Le cas échéant, vérifier si ce supremum et cet infimum appartiennent à l'ensemble.

a) $\left\{ \dfrac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z} \text{ et } n \neq 0 \right\}$

b) $\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}$

c) $\{x : x^2 + x - 1 < 0\}$

d) $\left\{ \dfrac{1}{n} + (-1)^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$

e) $\{(-1)^n n \mid n \in \mathbb{N}\}$

f) $\left\{ \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{N} \right\}$

g) $\{x^2 + x - 1 : x < 0\}$

Solution. Voici les réponses sans les démarches. Je vous laisse le soin de faire les démarches, *qui sont nécessaires pour une solution complète.*

a) $\inf = -1$, dans l'ensemble; $\sup = 1$, appartient à l'ensemble.

b) $\inf = 0$, dans l'ensemble; $\sup = \sqrt{2}$, pas dans l'ensemble.

c) $\inf = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, pas dans l'ensemble; $\sup = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, pas dans l'ensemble.

d) $\inf = -1$, pas dans l'ensemble; $\sup = \frac{3}{2}$, dans l'ensemble.

e) l'ensemble n'est ni majoré, ni minoré.

f) $\inf = 0$, pas dans l'ensemble; $\sup = 2$, dans l'ensemble.

g) $\inf = -\frac{5}{4}$, dans l'ensemble; l'ensemble n'est pas majoré.

Exercice 21. Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et soit $f \colon D \to \mathbb{R}$ une fonction. On définit respectivement le supremum de f sur $E \subseteq D$ et l'infimum de f sur E par

$$\sup_{x \in E} \big(f(x)\big) := \sup\{f(x) \mid x \in E\} \qquad \text{et} \qquad \inf_{x \in E} \big(f(x)\big) := \inf\{f(x) \mid x \in E\}.$$

De plus, on dit que le supremum (resp. l'infimum) est atteint en $x_0 \in E$ si on a respectivement

$$\sup_{x \in E} \big(f(x)\big) = f(x_0) \qquad \text{ou} \qquad \inf_{x \in E} \big(f(x)\big) = f(x_0).$$

Calculer les quantités suivantes si elles existent. Dire si le supremum ou l'infimum est atteint.

a) $\sup\limits_{x \in [0,1]} x^2$

b) $\inf\limits_{x \in (1,2)} (x+1)$

Suggestion. Pour le a), vous pouvez faire et utiliser l'exercice 33.

Exercice 22. a) Montrer que $\inf\limits_{x \in E} f(x) \leq \sup\limits_{x \in E} f(x)$.

b) Montrer qu'il y a égalité si et seulement si f est constante sur E.

Solution. a) D'une part, on a $\inf\limits_{E} f(x) \leq f(x)$ pour tout $x \in E$. D'autre part, on a $f(x) \leq \sup_E f(x)$. En combinant, on trouve $\inf\limits_{E} f(x) \leq f(x) \leq \sup\limits_{E} f(x)$.

b) Si f est constante, alors on a que $\inf_{x\in E} f(x) = \inf\{f(x)\} = f(x)$ et $\sup_{x\in E} f(x) = \sup\{f(x)\} = f(x)$. Réciproquement, si on égalité, alors on a $\inf_{y\in E} f(y) \leq f(x) \leq \sup_{y\in E} f(y)$. Comme le côté gauche est égal au côté droit, on a $f(x) = \inf_{y\in E} f(y) = \sup_{y\in E} f(y)$ pour tout $x \in E$.

Exercice 23. Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble, $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction et $E \subseteq D$ un sous-ensemble non vide. Montrer que $-\sup_{x\in E} f(x) = \inf_{x\in E}\big(-f(x)\big)$ et que $\sup_{x\in E}\big(-f(x)\big) = -\inf_{x\in E} f(x)$.

Exercice 24. Trouver un exemple de fonction f et d'ensemble E tels que le supremum de f sur E est atteint en plus d'un point.

Solution. On peut prendre $f(x) = |x|$ sur $[-1, 1]$. Alors le supremum est atteint en $x = \pm 1$ et au vaut 1. En effet, pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $x \leq |x| \leq 1$.

Exercice 25. Soit $D \subseteq \mathbb{R}$, $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ et $E \subseteq D$.

a) Montrer que $\sup_{x\in E}\big(f(x) + g(x)\big) \leq \sup_{x\in E}\big(f(x)\big) + \sup_{x\in E}\big(g(x)\big)$.

b) Montrer que $\inf_{x\in E}\big(f(x) + g(x)\big) \geq \inf_{x\in E}\big(f(x)\big) + \inf_{x\in E}\big(g(x)\big)$.

Solution. a) Puisque $f(x) \leq \sup_{x\in E}\big(f(x)\big)$ et $g(x) \leq \sup_{x\in E}\big(g(x)\big)$, on voit que

$$f(x) + g(x) \leq \sup_{x\in E}\big(f(x)\big) + \sup_{x\in E}\big(g(x)\big)$$

pour tout $x \in E$, donc $\sup_{x\in E}\big(f(x)\big) + \sup_{x\in E}\big(g(x)\big)$ est une majorant de $f + g$. Puisque $\sup_{x\in E}\big(f(x) + g(x)\big)$ est le plus petit majorant, la conclusion en suit.

Le b) se fait de la même façon.

4. Axiome de complétude

Exercice 26. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$.

Solution. On pose $E = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\}$. Cet ensemble est majoré par x. Si $x \geq 0$, alors E est non vide puisque $0 \in E$. Si $x < 0$, alors $-x > 0$. Par le principe d'Archimède, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $p > -x$ et donc $-p < x$. Ainsi, E est non vide puisque $-p \in E$. Par l'axiome de complétude, $\sup E$ existe. On pose $n = \sup E$.

On montre maintenant que $n \in \mathbb{Z}$. Puisque $n - \frac{1}{2}$ n'est pas un majorant, il existe $a \in E$ tel que $n - \frac{1}{2} < a \leq n$. En particulier, a est un entier et c'est l'unique entier de l'intervalle $\big[n - \frac{1}{2}, n\big]$. Ainsi, il suit que a est un majorant de E, car pour tout $x \in E$, on a soit $x \leq n - \frac{1}{2}$, soit $n - \frac{1}{2} < x \leq n$. Dans le premier cas, on a $x < a$ et dans le deuxième cas, on a $x = a$. En combinant les deux cas, on conclut que pour tout $x \in E$, on a $x \leq a$, d'où a est un majorant de E. Puisque n est le plus petit majorant, on a $a = n$, d'où n est un entier.

Enfin, on a bien $n \leq x < n+1$. En effet, on a $n \leq x$ puisque $n \in E$. On a $n+1 > x$, car sinon, $n+1$ serait un élément de E plus grand que le supremum.

Pour l'unicité, on suppose qu'il existe $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $m \leq x < m+1$ et $n \leq x < n+1$. Il suit que $-n-1 < -x \leq -n$ et donc $m-n-1 < 0 < m-n+1$. En additionant $-m+n$ partout, on obtient $-1 < n-m < 1$. Le seul entier dans l'intervalle $(-1,1)$ est 0 et comme $n-m$ est un entier, on déduit que $n-m=0$.

Exercice 27. En classe, la propriété d'Archimède a été utilisée pour démontrer la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (voir la section 1.4). Montrer la réciproque, c'est-à-dire que si la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ est vraie, alors $\mathbb{R}$ possède la propriété d'Archimède.

Solution. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $x > 0$. On cherche un naturel $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$. D'abord, par densité de $\mathbb{Q}$, il existe un rationnel $\frac{p}{q}$ tel que $0 < \frac{p}{q} < x$, donc on a $1 \leq p < qx$. Ainsi, il y a seulement le cas où $y > 1$ à faire.

Puisque $y > 1$, il suit que $1 < y < y^2$. De plus, on peut supposer que $y > x$, sinon $n = 1$ fait l'affaire. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe un rationnel $\frac{m}{b}$, avec $m, b \in \mathbb{N}$, tel que $0 < \frac{m}{b} < \frac{1}{y^2}$. Puisque $y > 1$, il suit que $\frac{1}{y} < 1 < qx$, où q est le naturel du premier paragraphe. Si $y < qx$, alors q est un naturel qui fait l'affaire et on a terminé. Si $qx \leq y$, alors on obtient les inégalités

$$0 < \frac{1}{b} \leq \frac{m}{b} < \frac{1}{y^2} < \frac{1}{y} < qx \qquad (*)$$

Puisque $\frac{1}{b} < \frac{1}{y^2}$, il en découle que $y^2 < b$. Autrement dit, on a $y < \frac{b}{y}$. Ensuite, en multipliant $(*)$ par b, on obtient $\frac{b}{y} < bqx$. En combinant, on a $y < \frac{b}{y} < bqx$. On peut conclure avec le naturel $n := bq$.

Exercice 28. Utiliser la propriété d'Archimède pour démontrer que $\mathbb{N}$ n'est pas majoré.

Exercice 29. Calculer les nombres suivants.

a) $\lfloor 3{,}2 \rfloor$ b) $\lfloor -\frac{1}{10} \rfloor$ c) $\left\lfloor \left(\frac{3}{7}\right)^2 \right\rfloor$

Exercice 30. A-t-on $\lfloor x^2 \rfloor = \lfloor x \rfloor^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$?

Solution. Non. Par exemple, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, mais $\lfloor 2 \rfloor = 2$. En effet, d'une part, on a $\sqrt{2} < \sqrt{4} = 2$ et $1 < \sqrt{2}$. Il suit que $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$. D'autre part, on a $(\sqrt{2})^2 = 2$ et il est clair que $\lfloor 2 \rfloor = 2$.

Un exemple dans les rationnels serait de prendre $\frac{7}{4}$. D'une part, $1 = \frac{4}{4} < \frac{7}{4} < \frac{8}{4} = 2$, donc $\lfloor \frac{7}{4} \rfloor = 1$. D'autre part, on a $\left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$ et donc on voit que $3 = \frac{48}{16} < \frac{49}{16} < \frac{64}{16} = 4$, d'où $\left\lfloor \left(\frac{7}{4}\right)^2 \right\rfloor = 3$.

Par contre, on peut remarquer que l'égalité est vraie lorsque x est un entier.

Exercice 31. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{Z}$.

a) Montrer que si $x < y$, alors $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$. Montrer qu'il est possible d'avoir égalité.

b) Montrer que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$.

c) Montrer que $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

Exercice 32. Soit $x \in \mathbb{R}$. La *partie fractionnaire* de x est définie par $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$.

a) Montrer que $0 \leq \{x\} < 1$.

b) Montrer que $\{x\}$ peut être irrationnel (même si on l'appelle partie *fractionnaire*).

c) Montrer que $\big\{\{x\}\big\} = \{x\}$.

d) Montrer que si $x = \frac{m}{n}$, où $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors

$$0 \leq \left\{\frac{m}{n}\right\} \leq 1 - \frac{1}{n}.$$

Solution. a) On a $x - \lfloor x \rfloor < x - (x-1) = 1$ et $x - \lfloor x \rfloor \geq x - x = 0$.

b) Soit $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. On sait que $\sqrt{2} > 1$, donc $x < 1$. Ainsi, on a $\lfloor x \rfloor = 0$. Il suit que $\{x\} = x$, qui est irrationnel (sinon $\frac{1}{x} = \sqrt{2}$ serait rationnel).

c) Par le a), on a $\big\lfloor \{x\} \big\rfloor = 0$. Ainsi, on a $\big\{\{x\}\big\} = \{x\} - \big\lfloor \{x\} \big\rfloor = \{x\} - 0 = \{x\}$.

d) Il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $r \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ tels que $m = nk + r$. On a donc que $\frac{m}{n} = k + \frac{r}{n}$ et en particulier, on a $k \leq \frac{m}{n} < k + 1$, d'où $\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor = k$. On obtient

$$\begin{aligned}
\left\{\frac{m}{n}\right\} &= \frac{m}{n} - \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor \\
&= \frac{m}{n} - k \\
&= \frac{m - nk}{n} \\
&= \frac{r}{n} \\
&\leq \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Le fait que $\left\{\frac{m}{n}\right\} \geq 0$ découle déjà du a).

Exercice 33. Soit $n \geq 2$ un entier fixé. Montrer que

$$\{x^n \mid 0 \leq x \leq 1\} = [0,1] \qquad \text{et} \qquad \{\sqrt[n]{x} \mid 0 \leq x \leq 1\} = [0,1].$$

Solution. On pose $E = \{x^n \mid 0 \leq x \leq 1\}$. On montre d'abord que $E \subseteq [0,1]$. Soit $y \in E$. Par définition de E, y est de la forme $y = x^n$, pour un certain $x \in [0,1]$. Puisque $0 \leq x \leq 1$, il suit que $x \leq xx = x^2 \leq 1$. Par récurrence, on arrive à la conclusion que $x^n \leq 1$, d'où $y \in [0,1]$.

Soit maintenant $y \in [0,1]$. On veut montrer que $y \in E$, c'est-à-dire qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $y = x^n$. On a montré en classe qu'il existe un unique $x \in [0,\infty)$ tel que $y = x^n$. Si $x > 1$, alors $y = x^n > 1$, ce qui est une contradiction. On conclut que $y \in [0,1]$.

En combinant les deux paragraphes, on a bien $E = [0,1]$.

La deuxième égalité se fait d'une façon similaire. Je vous laisse y penser.

Exercice 34. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ deux nombres positifs et soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$.

Exercice 35. Soit $x > 0$.

a) Soir $q \in \mathbb{Q}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\left(x^q\right)^n = x^{nq}$.

b) Montrer que si $a, m \in \mathbb{Z}$ et $b, n \in \mathbb{N}$ sont tels que $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$, alors $x^{\frac{a}{b}} = x^{\frac{m}{n}}$.

c) Montrer que

$$x^{\frac{a}{b}} = \left(\sqrt[b]{x}\right)^a.$$

Exercice 36. Soit $A, B \subseteq \mathbb{R}$ des sous-ensembles tels que

1. $\mathbb{R} = A \cup B$;
2. $A \cap B = \emptyset$;
3. A et B sont non vides;
4. si $a \in A$ et $b \in B$, alors $a < b$.

Montrer qu'il existe un unique nombre $x \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $a \in A$ et pour tout $b \in B$, on a $a \leq x \leq b$.

Exercice 37. Montrer que l'exercice précédent est faux si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Q}$.

5. Dénombrabilité

Exercice 38. Soit A, B des ensembles finis et $f \colon A \to B$. On note par $|A|$ la cardinalité de A, c'est-à-dire le nombre d'éléments dans A. Montrer que

a) si f est surjective, alors $|A| \geq |B|$;

b) si f est injective, alors $|A| \leq |B|$;

c) si f est bijective, alors $|A| = |B|$.

Exercice 39. Montrer que $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par

$$\varphi(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{si } n \text{ est pair;} \\ \frac{1-n}{2}, & \text{si } n \text{ est impair;} \end{cases}$$

est bijective.

Solution. On montre d'abord que φ est injective. Soit $n, m \in \mathbb{N}$. Si $\varphi(n) = \varphi(m)$, alors on considère trois cas.

1. n pair, m impair : on a $\frac{n}{2} = \frac{1-m}{2}$ et donc $n = 1-m$. Or, n et m sont trictement positifs, donc cette égalité est impossible.
2. n pair, m pair : on a $\frac{n}{2} = \frac{m}{2}$. Il s'ensuit que $n = m$.
3. n impair, m impair : on a $\frac{1-n}{2} = \frac{1-m}{2}$. Il suit que $n = m$.

On peut ainsi conclure que si $\varphi(n) = \varphi(m)$, alors $n = m$, donc φ est injective.

On montre maintenant que φ est surjective. Soit $m \in \mathbb{Z}$. On cherche $n \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(n) = m$. Si $m > 0$, alors $n = 2m$ fait l'affaire, puisque $\varphi(2m) = \frac{2m}{2} = m$. Si $m < 0$, alors on prend $n = 1 - 2m$. C'est un entier strictement positif, donc $n \in \mathbb{N}$ et on voit que $\varphi(n) = \frac{1-(1-2m)}{2} = m$. Si $m = 0$, alors $\varphi(1) = 0$. On conclut que φ est surjective.

Exercice 40. Montrer que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable, où $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n, m) \mid n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 41†. On dit qu'un ensemble A est *au plus dénombrable* si A est de cardinalité finie ou A est dénombrable. Si A est au plus dénombrable et si $B \subseteq A$, alors montrer que B est au plus dénombrable.

Solution. Si A est de cardinalité fini, alors B l'est aussi. Si A est dénombrable et B est fini, alors B est au plus dénombrable. Le seul cas qui reste est celui où A est dénombrable et B est infini. Ce cas peut sembler évident, mais il faut tout de même montrer que si B est infini, alors il est dénombrable. Autrement dit, il faut montrer que B est nécessairement en bijection avec $\mathbb{N}$ (ou l'équivalent).

Puisque A est dénombrable, on peut écrire les éléments de A en une liste $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ où chaque $a \in A$ apparaît une et une seule fois dans la liste. Puisque $B \subseteq A$, tous les éléments de B se trouvent dans cette liste une et une seule fois. On construit une liste pour B comme suit.

On pose $E_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in B\}$. C'est un sous-ensemble des naturels non vide. Par le principe du bon ordre, le minimum de E_1 est atteint. On pose $k_1 = \min E_1$ et $b_1 = a_{k_1}$.

À l'étape $n > 1$, on pose $E_n = \big\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in B \setminus \{b_1, \ldots, b_{n-1}\}\big\}$. Par le principe du bon ordre, le minimum de E_n est atteint; on pose $k_n = \min E_n$ et $b_n = a_{k_n}$.

On affirme que la liste $b_1, b_2, b_3, \ldots$ contient tous les éléments de B une et une seule fois. Commençons par montrer que $k_n < k_{n+1}$. On sait que $a_{k_{n+1}} = b_{n+1} \in B \setminus \{b_1, \ldots, b_n\}$, car $b_{n+1} \neq b_k$, pour $1 \leq k \leq n$. Ainsi, par définition de E_n, on a $k_{n+1} \in E_n$, ce qui veut dire que $\min E_n \leq k_{n+1}$. Ensuite, si, par l'absurde, on avait $k_n = \min E_n = k_{n+1}$, alors on aurait que $a_{k_{n+1}} = b_{n+1} = b_n \notin B \setminus \{b_1, \ldots, b_n\}$. Autrement dit, on aurait $k_{n+1} \notin E_{n+1}$, ce qui est impossible puisque $\min E_{n+1} = k_{n+1}$. D'où on obtient $k_n < k_{n+1}$. En particulier, si $m < n$, alors $k_m < k_n$.

Ensuite, on affirme que tous les éléments de B appraissent au plus une fois. En effet, si b apparaît deux fois dans la liste, disons $b = b_n$ et $b = b_m$, pour $m < n$, alors $b = a_{k_n}$ et $b = a_{k_m}$ avec $k_n \neq k_m$, ce qui est impossible, puisque la liste des a_n contient chaque $a \in A$ une et une seule fois.

On montre maintenant que la liste contient tous les éléments de B. Soit $b \in B$. Il est dans la liste des $a_1, a_2, \ldots$, donc il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $b = a_m$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $k_n \leq m < k_{n+1}$. Si $m = k_n$, alors $b = b_n$ qui est dans la liste. Sinon, on a $a_m \in B \setminus \{b_1, \ldots, b_n\}$ et donc $m \in E_{n+1}$. Or $m < k_{n+1}$, ce qui est impossible puisque $k_{n+1} = \min E_{n+1}$. On conclut que b est dans la liste.

On conclut que B est dénombrable.

Exercice 42. Soit A un ensemble qui n'est pas au plus dénombrable et soit B un ensemble. Montrer que

a) s'il existe $f \colon A \to B$ injective, alors B n'est pas au plus dénombrable;

b) s'il existe $g \colon B \to A$ surjective, alors B n'est pas au plus dénombrable.

Solution. a) Puisque f est injective, il s'ensuit que $f \colon A \to f(A)$ est bijective. Ainsi, $f(A)$ n'est pas au plus dénombrable et est contenue dans B. Par le numéro précédent, on conclut que B n'est pas au plus dénombrable.

b) Pour chaque $a \in A$, on choisit un élément $b_a \in g^{-1}(a)$. On pose $B' = \{b_a \mid a \in A\}$. Si on restreint f à B', alors elle est bijective : $f\big|_{B'} \colon B' \to A$. Donc B' a le même cardinal que A et est inclus dans B. L'exercice précédent permet de conclure que B n'est pas au plus dénombrable.

Exercice 43. Montrer qu'une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable. Plus précisément, soit I un ensemble dénombrable et pour chaque $i \in I$, soit A_i un ensemble dénombrable. Montrer que

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i := \{x \mid \exists i \in I,\ x \in A_i\}.$$

est dénombrable.
Indice. Montrez que vous pouvez remplacer I par $\mathbb{N}$ sans perdre de généralité. Ensuite, adaptez l'argument utiliser en classe pour les rationnels.

Solution. Puisque I est dénombrable, il existe une bijection $\varphi \colon I \to \mathbb{N}$. Quitte à utiliser $\varphi^{-1}(n)$, on peut supposer que $I = \mathbb{N}$.

Puisque chaque A_n est dénombrable, on peut écrire ses éléments en une liste

$$\begin{aligned} A_1 &= a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, \dots \\ A_2 &= a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{25}, \dots \\ A_3 &= a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, a_{35}, \dots \\ A_4 &= a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}, a_{45}, \dots \\ A_5 &= a_{51}, a_{52}, a_{53}, a_{54}, a_{55}, \dots \\ &\vdots \\ A_n &= a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \dots \\ &\vdots \end{aligned} \tag{$*$}$$

Pour montrer que A est dénombrable, on construit la bijection de la façon suivante. On pose $f(1) := a_{11}$. Ensuite, on parcourt la liste en prenant les diagonales dans $(*)$, comme on l'a fait en classe pour les rationnels. Ainsi, $f(2)$ est définie comme le prochain élément différent de a_{11} parmi $a_{21}, a_{12}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, a_{41}, a_{32}, a_{23}, a_{14}, a_{51}, \dots$ Ensuite, $f(3)$ est définie comme le prochain élément différent de $f(1)$ et $f(2)$ dans cette liste. À la n^e étape, $f(n)$ est définie comme étant le prochain élément différent de $f(1)$, $f(2)$,...,$f(n-1)$ parmi cette liste.

À la fin, on obtient une bijection de $f\colon \mathbb{N} \to A$.

Exercice 44†. Soit $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ l'ensemble des sous-ensembles de $\mathbb{N}$, c'est-à-dire l'ensemble

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{A \mid A \subseteq \mathbb{N}\}.$$

Le but de l'exercice est de montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas au plus dénombrable.

a) Montrer que $(0,1)$ n'est pas au plus dénombrable.
b) Soit $a, b, m, n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $2^a 3^b = 2^m 3^n$, alors $a = m$ et $b = n$.
c) Soit $x \in (0,1)$. Montrer que l'infimum de $\{q \in \mathbb{Q} \mid q > x\}$ existe et q'il vaut x.
d) Montrer que $f\colon (0,1) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ définie par

$$f(x) = \left\{ 2^a 3^b \;\middle|\; a, b \in \mathbb{N},\ \operatorname{pgcd}(a,b) = 1,\ \frac{a}{b} > x \right\}$$

est injective. Conclure que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas au plus dénombrable.

Solution. a) C'est la même démonstration qu'on a fait en classe pour $[0, \infty)$.

b) Sans perte de généralité, supposons que $a \geq m$. On a alors $2^{a-m} 3^b = 3^n$. Comme le côté droit n'est pas divisible par 2, le côté gauche ne l'est pas non plus, donc $a - m = 0$. Il s'ensuit que $b = n$.

c) On pose $E = \{q \in Q \mid q > x\}$. On sait que E est minoré par x, donc $I := \inf E$ existe. Supposons que $I > x$. Puisque les rationnels sont denses dans les réels, il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $I > q > x$. Ainsi, q appartient à E. Ceci contredit le fait que I est un minorant, donc $I = x$.

d) Soit $x, y \in (0,1)$. Supposons que $f(x) = f(y)$, c'est-à-dire

$$\left\{2^a 3^b \;\middle|\; a, b \in \mathbb{N},\ \operatorname{pgcd}(a,b) = 1,\ \frac{a}{b} > x\right\} = \left\{2^a 3^b \;\middle|\; a, b \in \mathbb{N},\ \operatorname{pgcd}(a,b) = 1,\ \frac{a}{b} > y\right\}. \quad (*)$$

Par le b), il s'ensuit que

$$\left\{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \operatorname{pgcd}(a,b) = 1,\ \frac{a}{b} > x\right\} = \left\{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \operatorname{pgcd}(a,b) = 1,\ \frac{a}{b} > y\right\}, \quad (\dagger)$$

En effet, supposons le contraire, donc il existe $a, b \in \mathbb{N}$ tels que, sans perte de généralité, $\frac{a}{b} > x$ et $\frac{a}{b} \leq y$. Dans ce cas, $2^a 3^b$ appartient à l'ensemble du côté gauche de la ligne $(*)$, mais pas à l'ensemble du côté droit à cause du b), ce qui est une contradiction.

On obtient ensuite que

$$\{q \in \mathbb{Q} \mid q > x\} = \{q \in \mathbb{Q} \mid q > y\}.$$

En effet, soit $q \in \mathbb{Q}$. Alors on a que $q > x > 0$ ssi il existe $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $q = \frac{a}{b}$ avec $\operatorname{pgcd}(a,b) = 1$ et $\frac{a}{b} > x$ ssi (a,b) est dans l'ensemble du côté gauche de $(\dagger)$, ssi (a,b) est dans celui du côté droit, ssi $q = \frac{a}{b} > y$.

Par le c), en prenant l'infimum de chaque côté, on trouve que $x = y$, donc f est injective. Enfin, on déduit que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable par l'exercice 42.

6. Topologie de $\mathbb{R}$

Exercice 45. Calculer les points limites des ensembles suivants.

a) $E := [0,1)$ b) $E := \mathbb{Z}$ c) $E = \mathbb{Q}$ d) $E = \left\{\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$

Solution. b) $E' = \emptyset$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on voit que $\dot{B}(x,1) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$, d'où $x \notin E'$.

c) $E' = \mathbb{R}$. En effet, soit $x \in \mathbb{R}$ et $r > 0$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $0 < |x - q| < \frac{r}{2}$. Ainsi, on a $q \in \dot{B}(x,r) \cap \mathbb{Q}$, d'où $x \in E'$.

Exercice 46. Déterminer quels ensembles parmi les suivants sont ouverts dans $\mathbb{R}$.

a) $E = \mathbb{R}$ b) $E = (0,2) \setminus \{1\}$ c) $E = (0,1) \cap \mathbb{Q}$ d) $E = \{1\}$

Solution. a) Ouvert b) Ouvert c) Non ouvert d) Non ouvert.

Je vous laisse remplir les détails.

Exercice 47. Quels ensembles de l'exercice précédent sont fermés dans $\mathbb{R}$?

Solution. a) Fermé b) Non fermé c) Non fermé d) Fermé

Je vous laisse remplir les détails.

Exercice 48. Montrer les propriétés suivantes des ouverts.

a) Si A_i est ouvert pour tout $i \in I$, alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est ouvert.

b) Si $A_1, \ldots, A_n$ sont ouverts, alors $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ est ouvert.

c) $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont ouverts.

Solution. a) Soit $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$. Il existe $i \in I$ tel que $x \in A_i$. Puisque A_i est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq A_i$. Ainsi, on a

$$B(x, r) \subseteq A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i,$$

donc x est dans l'intérieur de $\bigcup_{i\in I} A_i$. Puisque x est arbitraire, on conclut que $\bigcup_{i\in I} A_i$ est ouvert.

Exercice 49. Montrer les propriétés suivantes des fermés.

a) Si A_i est fermé pour tout $i \in I$, alors $\bigcap_{i\in I} A_i$ est fermé.

b) Si $A_1, \ldots, A_n$ sont fermés, alors $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ est fermé.

c) $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont fermés.

Exercice 50. Montrer que si $E \subseteq \mathbb{R}$ est fermé et si $x \in \mathbb{R}$ est un point limite de E, alors $x \in E$.