Analyse 1

Série 1

Nombres réels

Notation. Pour le cours, l'ensemble des naturels $\mathbb{N}$ ne contient pas 0. Ainsi, on écrit

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

On écrira $\mathbb{N} \cup \{0\}$ si l'on inclut 0.

1. Nombres rationnels

Exercice 1. Soit x, y deux nombres irrationnels.

a) Montrer que $x + y$ peut être rationnel ou irrationnel.

b) Montrer que xy peut être rationnel ou irrationnel.

Exercice 2. Montrer qu'il n'existe pas de nombre rationnel dont le carré est 12.

Exercice 3. Soit $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ un polynôme tel que $a_n \neq 0$ et a_j est un entier pour tout j. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un zéro de p, c'est-à-dire que $p(x_0) = 0$. Montrer que si $x_0 = \frac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{pgcd}(p, q) = 1$, alors on a que $p | a_0$ et $q | a_n$.

Exercice 4. Montrer que $\sqrt{2 + \sqrt{5}}$ est irrationnel.
Indice. Trouvez un polynôme p dont les coefficients sont entiers et qui a $\sqrt{2 + \sqrt{5}}$ comme zéro. Appliquez ensuite l'exercice précédent.

Exercice 5. Principe du bon ordre. Les nombres naturels possèdent la propriété suivante : tout ensemble $S \subseteq \mathbb{N}$ non vide contient un plus petit élément, autrement dit $\min S$ existe. Montrer le principe de récurrence à partir du principe du bon ordre : si $S \subseteq \mathbb{N}$ est tel que

i) $1 \in S$;

ii) si $k \in S$, alors $k + 1 \in S$;

alors $S = \mathbb{N}$.
Suggestion. Démontrez que $B := \mathbb{N} \setminus S$ est vide.

Exercice 6. Montrer la formule suivante par récurrence :

$$1^2 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}$ et k un entier tel que $0 \leq k \leq n$. Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$, que l'on lit « k parmi n », est défini par

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

a) Montrer la *règle de Pascal* : si $1 \leq k \leq n$, alors

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

b) Montrer que $\binom{n}{k}$ est nécessairement un entier.

Exercice 8. Théorème du binôme. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer la formule du binôme :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

2. Inégalités

Exercice 9. Montrer les propriétés suivantes de la valeur absolue.

a) $|x| \geq 0$

b) $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$

c) $|x| = |-x| = \max\{x, -x\}$

d) $|xy| = |x||y|$

e) $-|x| \leq x \leq |x|$

Exercice 10. Trouver tous les nombres $x \in \mathbb{R}$ qui vérifient les inégalités suivantes.

a) $x^2 + x + 1 > 3$

b) $\frac{x-1}{x+1} > 0$

c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0$

d) $\frac{2x+1}{x-1} \geq 3$

Exercice 11. Si $0 < a < b$, montrer que $a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$.

Exercice 12. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, les inégalités suivantes sont vérifiées.

a) $x^2 + xy + y^2 \geq 0$

b) $3x^2 + 5xy + 3y^2 \geq 0$

Exercice 13. Soit $a, b, c > 0$. Montrer que les inégalités suivantes sont vraies.

a) $a^2 + b^2 > ab$

b) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$

Exercice 14. Trouver les nombres réels qui vérifient les ingalités suivantes.

a) $|x-1|+|x+1|<1$

b) $|x-1|\cdot|x+2|\leq 3$

Exercice 15. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\max\{x,y\}=\frac{x+y+|y-x|}{2} \quad \text{et} \quad \min\{x,y\}=\frac{x+y-|y-x|}{2}.$$

Exercice 16. Montrer que si $x \geq \frac{199}{200}$, alors on a $x^{100} \geq \frac{1}{2}$.

3. Supremum et infimum

Exercice 17. Soit A et B des ensembles tels que $\sup A$, $\sup B$, $\inf A$ et $\inf B$ existent. Montrer que si $A \subseteq B$, alors $\sup A \leq \sup B$ et $\inf A \geq \inf B$.

Exercice 18. Déterminer au moins un majorant et un minorant pour chacun des ensembles suivants si possible, sinon montrer que l'ensemble ne possède pas de majorant ou de minorant.

a) $\{p \mid p \text{ est premier}\}$

b) $\{x^2-x \mid x \in \mathbb{R}\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} : |x-2|<1\}$

d) $\left\{\frac{p}{q} \,\middle|\, p,q \in \mathbb{N},\ 0<p<10,\ 1\leq q<100\right\}$

e) $\left\{\frac{1}{y} \,\middle|\, y \in (0,1)\right\}$

Exercice 19. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $-\infty < a \leq b < \infty$. Montrer que

a) $\sup[a,b]=b$

b) $\inf[a,b]=a$

c) $\sup(a,b)=b$

d) $\inf(a,b)=a$

Exercice 20. Trouver le supremum et l'infimum des ensembles suivants s'ils existent. Le cas échéant, vérifier si ce supremum et cet infimum appartiennent à l'ensemble.

a) $\left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \text{ et } n \neq 0\right\}$

b) $\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}$

c) $\{x : x^2+x-1<0\}$

d) $\left\{\frac{1}{n}+(-1)^n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$

e) $\{(-1)^n n \mid n \in \mathbb{N}\}$

f) $\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{m} \,\middle|\, m,n \in \mathbb{N}\right\}$

g) $\{x^2+x-1 : x<0\}$

Exercice 21. Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction. On définit respectivement le supremum de f sur $E \subseteq D$ et l'infimum de f sur E par

$$\sup_{x\in E}\big(f(x)\big) := \sup\{f(x) \mid x \in E\} \qquad \text{et} \qquad \inf_{x\in E}\big(f(x)\big) := \inf\{f(x) \mid x \in E\}.$$

De plus, on dit que le supremum (resp. l'infimum) est atteint en $x_0 \in E$ si on a respectivement

$$\sup_{x\in E}\big(f(x)\big) = f(x_0) \qquad \text{ou} \qquad \inf_{x\in E}\big(f(x)\big) = f(x_0).$$

Calculer les quantités suivantes si elles existent. Dire si le supremum ou l'infimum est atteint.

a) $\sup_{x\in[0,1]} x^2$

b) $\inf_{x\in(1,2)} (x+1)$

Suggestion. Pour le a), vous pouvez faire et utiliser l'exercice 33.

Exercice 22. a) Montrer que $\inf_{x\in E} f(x) \leq \sup_{x\in E} f(x)$.

b) Montrer qu'il y a égalité si et seulement si f est constante sur E.

Exercice 23. Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble, $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction et $E \subseteq D$ un sous-ensemble non vide. Montrer que $-\sup_{x\in E} f(x) = \inf_{x\in E}\big(-f(x)\big)$ et que $\sup_{x\in E}\big(-f(x)\big) = -\inf_{x\in E} f(x)$.

Exercice 24. Trouver un exemple de fonction f et d'ensemble E tels que le supremum de f sur E est atteint en plus d'un point.

Exercice 25. Soit $D \subseteq \mathbb{R}$, $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ et $E \subseteq D$.

a) Montrer que $\sup_{x\in E}\big(f(x)+g(x)\big) \leq \sup_{x\in E}\big(f(x)\big) + \sup_{x\in E}\big(g(x)\big)$.

b) Montrer que $\inf_{x\in E}\big(f(x)+g(x)\big) \geq \inf_{x\in E}\big(f(x)\big) + \inf_{x\in E}\big(g(x)\big)$.

4. Axiome de complétude

Exercice 26. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$.

Exercice 27. En classe, la propriété d'Archimède a été utilisée pour démontrer la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (voir la section 1.4). Montrer la réciproque, c'est-à-dire que si la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ est vraie, alors $\mathbb{R}$ possède la propriété d'Archimède.

Exercice 28. Utiliser la propriété d'Archimède pour démontrer que $\mathbb{N}$ n'est pas majoré.

Exercice 29. Calculer les nombres suivants.

a) $\lfloor 3{,}2 \rfloor$ b) $\lfloor -\frac{1}{10} \rfloor$ c) $\left\lfloor \left(\frac{3}{7}\right)^2 \right\rfloor$

Exercice 30. A-t-on $\lfloor x^2 \rfloor = \lfloor x \rfloor^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$?

Exercice 31. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{Z}$.

a) Montrer que si $x < y$, alors $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$. Montrer qu'il est possible d'avoir égalité.

b) Montrer que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$.

c) Montrer que $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

Exercice 32. Soit $x \in \mathbb{R}$. La *partie fractionnaire* de x est définie par $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$.

a) Montrer que $0 \leq \{x\} < 1$.

b) Montrer que $\{x\}$ peut être irrationnel (même si on l'appelle partie *fractionnaire*).

c) Montrer que $\big\{\{x\}\big\} = \{x\}$.

d) Montrer que si $x = \frac{m}{n}$, où $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors

$$0 \leq \left\{\frac{m}{n}\right\} \leq 1 - \frac{1}{n}.$$

Exercice 33. Soit $n \geq 2$ un entier fixé. Montrer que

$$\{x^n \mid 0 \leq x \leq 1\} = [0,1] \qquad \text{et} \qquad \{\sqrt[n]{x} \mid 0 \leq x \leq 1\} = [0,1].$$

Exercice 34. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ deux nombres positifs et soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$.

Exercice 35. Soit $x > 0$.

a) Soir $q \in \mathbb{Q}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\left(x^q\right)^n = x^{nq}$.

b) Montrer que si $a, m \in \mathbb{Z}$ et $b, n \in \mathbb{N}$ sont tels que $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$, alors $x^{\frac{a}{b}} = x^{\frac{m}{n}}$.

c) Montrer que

$$x^{\frac{a}{b}} = \left(\sqrt[b]{x}\right)^a.$$

Exercice 36. Soit $A, B \subseteq \mathbb{R}$ des sous-ensembles tels que

1. $\mathbb{R} = A \cup B$;
2. $A \cap B = \emptyset$;
3. A et B sont non vides;
4. si $a \in A$ et $b \in B$, alors $a < b$.

Montrer qu'il existe un unique nombre $x \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $a \in A$ et pour tout $b \in B$, on a $a \leq x \leq b$.

Exercice 37. Montrer que l'exercice précédent est faux si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Q}$.

5. Dénombrabilité

Exercice 38. Soit A, B des ensembles finis et $f\colon A \to B$. On note par $|A|$ la cardinalité de A, c'est-à-dire le nombre d'éléments dans A. Montrer que

a) si f est surjective, alors $|A| \geq |B|$;

b) si f est injective, alors $|A| \leq |B|$;

c) si f est bijective, alors $|A| = |B|$.

Exercice 39. Montrer que $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par

$$\varphi(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{si } n \text{ est pair;} \\ \frac{1-n}{2}, & \text{si } n \text{ est impair;} \end{cases}$$

est bijective.

Exercice 40. Montrer que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable, où $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n, m) \mid n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 41†. On dit qu'un ensemble A est *au plus dénombrable* si A est de cardinalité finie ou A est dénombrable. Si A est au plus dénombrable et si $B \subseteq A$, alors montrer que B est au plus dénombrable.

Exercice 42. Soit A un ensemble qui n'est pas au plus dénombrable et soit B un ensemble. Montrer que

a) s'il existe $f\colon A \to B$ injective, alors B n'est pas au plus dénombrable;

b) s'il existe $g\colon B \to A$ surjective, alors B n'est pas au plus dénombrable.

Exercice 43. Montrer qu'une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable. Plus précisément, soit I un ensemble dénombrable et pour chaque $i \in I$, soit A_i un ensemble dénombrable. Montrer que

$$A = \bigcup_{i\in I} A_i := \{x \mid \exists i \in I,\ x \in A_i\}.$$

est dénombrable.
Indice. Montrez que vous pouvez remplacer I par $\mathbb{N}$ sans perdre de généralité. Ensuite, adaptez l'argument utiliser en classe pour les rationnels.

Exercice 44†. Soit $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ l'ensemble des sous-ensembles de $\mathbb{N}$, c'est-à-dire l'ensemble

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{A \mid A \subseteq \mathbb{N}\}.$$

Le but de l'exercice est de montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas au plus dénombrable.

a) Montrer que $(0,1)$ n'est pas au plus dénombrable.
b) Soit $a, b, m, n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $2^a 3^b = 2^m 3^n$, alors $a = m$ et $b = n$.
c) Soit $x \in (0,1)$. Montrer que l'infimum de $\{q \in \mathbb{Q} \mid q > x\}$ existe et q'il vaut x.
d) Montrer que $f\colon (0,1) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ définie par

$$f(x) = \left\{2^a 3^b \;\middle|\; a, b \in \mathbb{N},\ \mathrm{pgcd}(a,b) = 1,\ \frac{a}{b} > x\right\}$$

est injective. Conclure que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas au plus dénombrable.

6. Topologie de $\mathbb{R}$

Exercice 45. Calculer les points limites des ensembles suivants.

a) $E := [0,1)$ b) $E := \mathbb{Z}$ c) $E = \mathbb{Q}$ d) $E = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

Exercice 46. Déterminer quels ensembles parmi les suivants sont ouverts dans $\mathbb{R}$.

a) $E = \mathbb{R}$ b) $E = (0,2) \setminus \{1\}$ c) $E = (0,1) \cap \mathbb{Q}$ d) $E = \{1\}$

Exercice 47. Quels ensembles de l'exercice précédent sont fermés dans $\mathbb{R}$?

Exercice 48. Montrer les propriétés suivantes des ouverts.

a) Si A_i est ouvert pour tout $i \in I$, alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est ouvert.
b) Si $A_1, \ldots, A_n$ sont ouverts, alors $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ est ouvert.
c) $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont ouverts.

Exercice 49. Montrer les propriétés suivantes des fermés.

a) Si A_i est fermé pour tout $i \in I$, alors $\bigcap_{i \in I} A_i$ est fermé.

b) Si $A_1, \ldots, A_n$ sont fermés, alors $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ est fermé.

c) $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont fermés.

Exercice 50. Montrer que si $E \subseteq \mathbb{R}$ est fermé et si $x \in \mathbb{R}$ est un point limite de E, alors $x \in E$.