Analyse 1

Série 0

Notions de base

Les notions de cette série sont vues dans le cours MAT1500 — Mathématiques discrètes. Puisque le cours n'est pas préalable, il est possible que vous ne puissiez pas faire tous les exercices.

Notation. Pour le cours, l'ensemble des naturels $\mathbb{N}$ ne contient pas 0. Ainsi, on écrit

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

On écrira $\mathbb{N} \cup \{0\}$ si l'on inclut 0.

Exercice 1. Soit A, B deux ensembles non vides.

a) Donner la définition de ce qu'est une fonction $f\colon A \to B$.

b) Quel est le domaine et le codomaine de f ?

c) Quelle est la différence entre le codomaine et l'image de f ?

Solution. a) Une fonction est une relation $R \subseteq A \times B$ telle que si aRb_1 et aRb_2, alors $b_1 = b_2$.

b) Le domaine est A et le codomaine est B.

c) L'image de f est l'ensemble $f(A) \subseteq B$ défini par $f(A) = \{f(a) \in B \mid a \in A\}$. Ainsi, l'image de f est un sous-ensemble (strict ou non) du codomaine. Ce sont les valeurs atteintes par f.

Exercice 2. a) Donner la définition d'une fonction injective.

b) Déterminer quelles fonctions parmi les suivantes sont injectives :

i) $\begin{aligned} f\colon \{1,2,3\} &\to \{0,2,4,6\} \\ n &\mapsto 2n \end{aligned}$ *ii)* $\begin{aligned} f\colon \{a,b,c,d\} &\to \{0,1\} \\ a &\mapsto 0 \\ b &\mapsto 1 \\ c &\mapsto 0 \\ d &\mapsto 1 \end{aligned}$ *iii)* $\begin{aligned} f\colon \mathbb{N} &\to \mathbb{Z} \\ n &\mapsto n \end{aligned}$

Solution. a) Une fonction $f\colon A \to B$ est injective si pour tout $a_1, a_2 \in A$ tels que $f(a_1) = f(a_2)$, on a $a_1 = a_2$.

b) *i)* Elle est injective. En effet, $f(1)$, $f(2)$ et $f(3)$ sont tous différents, donc on a bien $f(n) = f(m)$ si et seulement si $m = n$.

ii) Elle n'est pas injective. En effet, on a $f(a) = 0$ et $f(c) = 0$, mais $a \neq c$.

iii) Elle est injective, car si $f(n) = f(m)$, alors on a $n = m$ par définition de f.

Exercice 3. a) Donner la définition d'une fonction surjective.

b) Déterminer quelles fonctions du 2b) sont surjectives.

Solution. a) Une fonction $f\colon A \to B$ est surjective si pour tout $b \in B$, il existe $a \in A$ tel que $f(a) = b$. Dans ce cas, on a $f(A) = B$.

b) *i*) Elle n'est pas surjective, car $f(n) \neq 0$ pour $n \in \{1, 2, 3\}$.

ii) Elle est surjective. En effet, on a $f(a) = 0$ et $f(b) = 1$, ainsi il est clair que $f(\{a, b, c, d\}) = \{0, 1\}$.

iii) Elle n'est pas surjective, car pour -1, il n'existe aucun $n \in \mathbb{N}$ tel que $n = f(n) = -1$.

Exercice 4. Soit $A = \{0, 1, 2\}$ et $B = \{a, b\}$.

a) Compter le nombre de fonctions injectives $f\colon A \to B$ possibles.

b) Compter le nombre de fonctions surjectives $f\colon A \to B$ possibles.

Solution. a) Il n'y a aucune fonction injective, car si $f(n) = a$, pour un $n \in \{0, 1, 2\}$ et si $f(m) = b$ pour un $m \in \{0, 1, 2\} \setminus \{n\}$, alors pour $k \in \{0, 1, 2\} \setminus \{m, n\}$, $f(k)$ doit être égal à a ou à b, ce qui contredit l'injectivité.

b) Si $f(1) = a$, alors il y a trois possibilités :

$$\begin{array}{c} 2 \mapsto a \\ 3 \mapsto b \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{c} 2 \mapsto b \\ 3 \mapsto b \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{c} 2 \mapsto b \\ 3 \mapsto a. \end{array}$$

Si $f(1) = b$, alors il y a également trois possibilités semblables. Il y a ainsi au total 6 possibilités.

Exercice 5. a) Donner la définition d'une fonction bijective.

b) Donner deux exemples de fonctions qui soient bijectives. Donner également un exemple d'une fonction qui n'est pas bijective.

Solution. a) Une fonction est bijective si elle est injective et surjective.

b) Il y a plusieurs choix possibles. Si A est un ensemble non vide, alors $id\colon A \to A$ est toujours bijective, où $id(a) := a$ pour tout $a \in A$. En effet, elle est injective, puisque $id(a) = id(b)$ si et seulement si $a = b$, par définition. Elle est surjective, puisque pour tout $a \in A$, on a $id(a) = a$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Alors on définit une permutation de S est comme une fonction $s\colon S \to S$ bijection. Par exemple, on définit $s(k) = k + 1$ si $k \neq n$ et

$s(n) = 1$. Elle est injective. En effet, on traite les cas : si $k \neq n$ et $\ell \neq n$, alors si on a $s(k) = s(\ell)$, on doit avoir $k+1 = \ell+1$ et donc $k = \ell$. Si $\ell = n$ et $s(\ell) = s(k)$, alors $s(k) = 1$ et donc $k = n$.

Ensuite, S est surjective, puisque pour $\ell \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, on a $s(\ell - 1) = \ell$, si $\ell \neq 1$, sinon on a $s(n) = 1 = \ell$.

Enfin, la fonction $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = 0$, n'est pas injective, car $f(0) = f(1)$, donc elle n'est pas bijective. (Remarque : f n'est pas surjective non plus.)

Les exercices 6 à 9 sont plus difficiles. Il est tout de même recommandé d'essayer de les faire et de comprendre les solutions.

Exercice 6. Soit A et B deux ensembles non vides.

a) Montrer qu'une fonction $f \colon A \to B$ est injective si et seulement si elle possède un inverse à gauche.

b) Montrer qu'une fonction $g \colon A \to B$ est surjective si et seulement si elle possède un inverse à droite.

c) Déduire qu'une fonction $h \colon A \to B$ est bijective si et seulement si elle possède un inverse.

Solution. a) $\Rightarrow$) Soit $a \in A$. On pose $b = f(a)$. Puisque f est injective, un tel a est unique, c'est-à-dire que si $f(a') = b$, alors $a' = a$. Ainsi, pour chaque $b \in B$, s'il existe $a \in A$ tel que $f(a) = b$, on définit $g(b) := a$. S'il n'existe aucun $a \in A$ tel que $f(a) = b$, alors on définit $g(b) = a^*$, où $a^* \in A$ est un élément quelconque fixé. Ainsi définie, on voit que

$$g \circ f(a) = g\big(f(a)\big) = a.$$

$\Leftarrow$) On suppose qu'il existe $g \colon B \to A$ telle que $g \circ f(a) = a$ pour tout $a \in A$. Si $f(a) = f(b)$, alors on applique g des deux côtés : on a

$$f(a) = f(b) \qquad \Rightarrow \qquad g\big(f(a)\big) = g\big(f(b)\big) \qquad \Rightarrow \qquad a = b,$$

d'où f est injective.

b) $\Rightarrow$) Puisque g est surjective, pour tout $b \in B$, il existe $a \in A$ tel que $g(a) = b$. Pour chaque $b \in B$, on choisit un $a \in A$ (n'importe lequel) tel que $g(a) = b$ et on pose $f(b) := a$. Ainsi définie, on voit que $g \circ f(b) = g(a) = b$, d'où f est un inverse à droite.

$\Leftarrow$) Soit $f \colon B \to A$ l'inverse à droite de g. Si $b \in B$, alors on a $g \circ f(b) = b$. Ainsi, l'élément $f(b) \in A$ est tel que $g\big(f(b)\big) = b$, d'où g est surjective.

c) Si $h \colon A \to B$ est bijective, alors il existe un inverse à gauche $g \colon B \to A$ et un inverse à droite $f \colon B \to A$. Il faut montrer que $f = g$. D'une part, f et g ont le même domaine et codomaine. Ensuite, pour $b \in B$, on a que

$$h \circ f(b) = b \qquad \Rightarrow \qquad g \circ h \circ f(b) = g(b) \qquad \Rightarrow \qquad f(b) = g(b),$$

car $g \circ h = id$, l'identité. On conclut que $f = g$ et donc que h est inversible.

Exercice 7. Soit A et B deux ensembles. On rappelle que l'*union* de A et B est

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

et l'*intersection* de A et B est

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Enfin, on dit que $A = B$ si $A \subseteq B$ et $A \supseteq B$, autrement dit $x \in A$ si et seulement si $x \in B$. Soit C un troisième ensemble. Montrer que

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Solution. On montre d'abord que $(A \cup B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Soit $x \in (A \cup B) \cap C$. Ceci signifie que

$$x \in A \cup B \textbf{ et } x \in C \quad \Leftrightarrow \quad \big[x \in A \textbf{ ou } x \in B\big] \;\; \textbf{et} \;\; x \in C.$$

À partir d'ici, il s'agit de logique; on pourrait écrire les tables de vérité pour faire la suite, mais nous n'aurons pas besoin de cet outil pour le reste du cours, donc réfléchissez et tentez de vous convaincre que la ligne suivante est vraie

$$\big[x \in A \textbf{ ou } x \in B\big] \;\; \textbf{et} \;\; x \in C \quad \Leftrightarrow \quad \big[x \in A \textbf{ et } x \in C\big] \textbf{ ou } \big[x \in B \textbf{ et } x \in C\big].$$

Si $x \in A$ et $x \in C$, ceci signifie exactement que $x \in A \cap C$ et, de façon similaire, si $x \in B$ et $x \in C$, on a $x \in B \cap C$. Comme on a $x \in A \cap C$ ou $x \in B \cap C$, il suit que $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Pour montrer que $(A \cup B) \cap C \supseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$, on peut effectuer la même démarche dans le sens inverse, puisqu'à chaque étape, on avait une équivalence (un si et seulement si ($\Leftrightarrow$)).

Exercice 8. Soit A, B deux ensembles non vides, $A_1, A_2 \subseteq A$ et $B_1, B_2 \subseteq B$ des sous-ensembles et soit $f\colon A \to B$ une fonction. On rappelle que la *préimage* ou l'*image réciproque* de B_1 par f est

$$f^{-1}(B_1) = \{a \in A \mid f(a) \in B_1\}.$$

L'*image direct* ou simplement l'*image* de A_1 par f est

$$f(A_1) = \{f(a) \in B \mid a \in A_1\}.$$

Montrer les égalités ou les inclusions d'ensembles suivants.

a) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

Solution. $\subseteq$) Soit $a \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$. Par définition, on sait que $f(a) \in B_1 \cup B_2$. Il suit que $f(a)$ appartient à B_1 ou à B_2 ou aux deux. Si $f(a) \in B_1$, alors on sait que $a \in f^{-1}(B_1)$ et donc $a \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$. Le raisonnement est le même si $a \in B_2$.

$\supseteq$) Soit $a \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$. Il existe $j \in \{1, 2\}$ tel que $f(a) \in B_j$. Il suit que $f(a) \in B_1 \cup B_2$ et donc $a \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$.

b) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

Solution. $\subseteq$) Soit $a \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$. Par définition, on sait que $f(a) \in B_1 \cap B_2$. Puisque $f(a) \in B_1$, il suit que $a \in f^{-1}(B_1)$. De même, puisque $f(a) \in B_2$, il suit que $a \in f^{-1}(B_2)$. On conclut que $a \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

$\supseteq$) Soit $a \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$. Puisque $a \in f^{-1}(B_1)$, on sait que $f(a) \in B_1$. De même, puisque $a \in f^{-1}(B_2)$, on sait que $f(a) \in B_2$. On conclut que $f(a) \in B_1 \cap B_2$ et donc $a \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$.

c) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$

Solution. $\subseteq$) Soit $a \in f^{-1}(B_1 \setminus B_2)$. Par définition, on a $f(a) \in B_1 \setminus B_2$. Il suit que $f(a) \in B_1$ et donc que $a \in f^{-1}(B_1)$. Ensuite, on sait que $f(a) \notin B_2$ et par définition de la préimage, on conclut que $a \notin f^{-1}(B_2)$. On a bien $a \in f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.

$\supseteq$) Soit $a \in f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$. Puisque $a \in f^{-1}(B_1)$, on a que $f(a) \in B_1$ et comme $a \notin f^{-1}(B_2)$, on a que $f(a) \notin B_2$. Il suit que $f(a) \in B_1 \setminus B_2$, c'est-à-dire que $a \in f^{-1}(B_1 \setminus B_2)$.

d) $f^{-1}(B_1^c) = f^{-1}(B_1)^c$ pour tout $B_1 \subseteq B$ (Ici, le c est signifie le complément. On a $B_1^c = B \setminus B_1$ et $f^{-1}(B_1)^c = A \setminus f^{-1}(B_1)$.)

Solution. L'égalité est équivalente à $f^{-1}(B \setminus B_1) = A \setminus f^{-1}(B_1)$. En utilisant le c), on voit que $f^{-1}(B \setminus B_1) = f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(B_1)$. Or, on sait que $f^{-1}(B) = A$, car B est le codomaine de f. On a donc l'égalité souhaitée.

e) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

Solution. $\subseteq$) Soit $b \in f(A_1 \cup A_2)$. Par définition, il existe $a \in A_1 \cup A_2$ tel que $b = f(a)$. Si $a \in A_1$, alors $b = f(a) \in f(A_1)$ et donc $b \in f(A_1) \cup f(A_2)$. On arrive à la même conclusion si $a \in A_2$. On a bien que $b \in f(A_1) \cup f(A_2)$.

$\supseteq$) Soit $b \in f(A_1) \cup f(A_2)$. Il existe $j \in \{1, 2\}$ tel que $b \in f(A_j)$. Par définition, il existe $a \in A_j$ tel que $b = f(a)$. Or, on sait que $a \in A_1 \cup A_2$ et donc $b = f(a) \in f(A_1 \cup A_2)$.

f) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

Solution. Soit $b \in f(A_1 \cap A_2)$. Par définition, il existe $a \in A_1 \cap A_2$ tel que $b = f(a)$. Il suit que $a \in A_1$ et que $a \in A_2$ et donc que $f(a) \in A_1$ et que $f(a) \in A_2$. D'où on a $b = f(a) \in f(A_1) \cap f(A_2)$.

g) $f(A_1 \setminus A_2) \supseteq f(A_1) \setminus f(A_2)$

Solution. Si $f(A_1) \setminus f(A_2)$ est vide, alors l'inclusion est triviale, donc on suppose qu'il est non vide. Soit $b \in f(A_1) \setminus f(A_2)$. Par définition, il existe $a \in A_1$ tel que $b = f(a)$ et $f(a) \notin f(A_2)$. Puisque $f(a) \notin f(A_2)$, il suit que $a \notin A_2$. Ainsi, on a $a \in A_1 \setminus A_2$, ce qui veut dire que $f(a) = b \in f(A_1 \setminus A_2)$.

h) si f est injective, alors il y a égalité au f)

Solution. Soit $b \in f(A_1) \cap f(A_2)$. Il existe $a_1 \in A_1$ et $a_2 \in A_2$ tels que $f(a_1) = b$ et $f(a_2) = b$. Puisque f est injective, on a que $a_1 = a_2$. Ainsi, il suit que $a_1 \in A_1 \cap A_2$, d'où $f(a_1) = b \in f(A_1 \cap A_2)$.

i) si pour tout $A_1, A_2 \subseteq X$, on a $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$, alors f est injective

Solution. On suppose le contraire, c'est-à-dire que f n'est pas injective. Ainsi, il existe $a_1, a_2 \in A$ tel que $a_1 \neq a_2$ et $f(a_1) = f(a_2)$. On pose $A_1 = \{a_1\}$ et $A_2 = \{a_2\}$. D'une part, on a que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. D'autre part, on voit que $f(A_1) \cap f(A_2) = \{f(a_1)\} \neq \emptyset$. Or, cela est une contraction, car par hypothèse, on doit avoir $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$, mais on a montré que $f(A_1) \cap f(A_2) \not\subseteq f(A_1 \cap A_2) = \emptyset$. On conclut que f est injective.

j) si f est injective, alors il y a égalité au g)

Solution. Soit $b \in f(A_1 \setminus A_2)$. Il existe $a \in A_1 \setminus A_2$ tel que $f(a) = b$. On sait que $f(a) \in f(A_1)$. On suppose que $f(a) \in f(A_2)$ et on cherche une contradiction. Par définition, il existe $a_2 \in A_2$ tel que $f(a_2) = f(a)$. Or, puisque f est injective, on doit avoir $a = a_2$. Cela est impossible, car $a \notin A_2$ et $a_2 \in A_2$. Ainsi, on conclut que $b = f(a) \in f(A_1) \setminus f(A_2)$.

k) si pour tout $A_1, A_2 \subseteq X$, on a $f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2)$, alors f est injective.

Solution. On suppose le contraire, c'est-à-dire que f n'est pas injective. Ainsi, il existe $a_1, a_2 \in A$ tels que $a_1 \neq a_2$ et $f(a_1) = f(a_2)$. On pose $A_1 = \{a_1\}$ et $A_2 = \{a_2\}$. On voit que $f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) = \{f(a_1)\}$, mais que $f(A_1) \setminus f(A_2) = \{f(a_1)\} \setminus \{f(a_2)\} = \emptyset$. Cela contredit l'hypothèse que $f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2)$, d'où f est injective.

Exercice 9. Soit A et B deux ensembles non vides, $A_1, A_2 \subseteq A$ deux sous-ensembles et $f\colon A \to B$ une fonction. Soit $b \in f(A_1 \setminus A_2)$. Par définition, il existe $a \in A_1 \setminus A_2$ tel que $f(a) = b$. Il suit que $a \in A_1$ et que $a \notin A_2$ et donc $f(a) \in f(A_1)$ et $f(a) \notin f(A_2)$. D'où il suit que $b = f(a) \in f(A_1) \setminus f(A_2)$. Puisque $b \in f(A_1 \setminus A_2)$ était quelconque, on conclut que $f(A_1 \setminus A_2) \subseteq f(A_1) \setminus f(A_2)$.
Où est l'erreur dans ce raisonnement ?

Solution. Il est faux que si $a \notin A_2$, alors $f(a) \notin f(A_2)$. En effet, on considère la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. On prend $A_1 = [0, 1]$, $A_2 = [-1, 0]$ et $a = 1$. On voit que $a \in A_1$ et que $a \notin A_2$, mais $f(a) = 1 \in f(A_2)$, car $f(-1) \in A_2$ et $f(1) = f(-1)$.

Exercice 10. Soit X, Y des ensembles non vides et soit $f\colon X \to Y$.

a) Est-ce que $f\big(f^{-1}(B)\big) \subseteq B$ pour tout $B \subseteq Y$?

Solution. Oui. Si $y \in f\big(f^{-1}(B)\big)$, alors il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Mais alors, on a $f(x) \in B$ et donc $y \in B$.

b) Est-ce que $f\big(f^{-1}(B)\big) \supseteq B$ pour tout $B \subseteq Y$?

Solution. Non. Par exemple, avec $X := Y := \mathbb{N}$, $f(x) := 1$ et $B := \mathbb{N}$, on a $B \not\subseteq$

$f\big(f^{-1}(B)\big) = f(\mathbb{N}) = \{1\}$.

c) Est-ce que $f^{-1}\big(f(A)\big) \subseteq A$ pour tout $A \subseteq X$?

Solution. Non. Par exemple, avec $X := Y := \mathbb{N}$, $f(x) := 1$ et $A := \{1\}$, on a $f^{-1}\big(f(A)\big) = f^{-1}(\{1\}) = \mathbb{N} \not\subseteq A$.

d) Est-ce que $f^{-1}\big(f(A)\big) \supseteq A$ pour tout $A \subseteq X$?

Solution. Oui. Si $x \in A$, alors on a que $f(x) \in f(A)$ et donc $x \in f^{-1}\big(f(A)\big)$.

e) Pour les énoncés dont la réponse est non, quelle condition sur f est nécessaire et suffisante afin que la réponse devienne oui ?

Solution. Pour le b), cette conclusion est vraie si et seulement si f est surjective.

D'abord, on suppose que f est surjective. Soit $y \in B$. Il existe $x \in X$ tel que $f(x) = y$. On a donc que $x \in f^{-1}(B)$ et par conséquent que $y = f(x) \in f\big(f^{-1}(B)\big)$.

Ensuite, on suppose que f n'est pas surjective. Alors il existe $y \in Y$ tel que $y \notin f(X)$. Dans ce cas, on a $f\big(f^{-1}(Y)\big) = f(X) \not\supseteq Y$. Ainsi, la conclusion est fausse avec $B := Y$. On a montré la contraposée de la réciproque.

Pour le c), cette conclusion est vraie si et seulement si f est injective.

D'abord, on suppose que f est injective. Soit $x \in f^{-1}\big(f(A)\big)$. Cela veut dire que $f(x) \in f(A)$, c'est-à-dire qu'il existe $\tilde{x} \in A$ tel que $f(\tilde{x}) = f(x)$. Comme f est injective, on a que $x = \tilde{x} \in A$.

Ensuite, on suppose que f n'est pas injective. Alors, il existe $x_1, x_2 \in X$ tels que $x_1 \neq x_2$ et $f(x_1) = f(x_2)$. On a que $f^{-1}\big(f(\{x_1\})\big) = f^{-1}\big(\{f(x_1)\}\big) \supseteq \{x_1, x_2\}$ et donc $f^{-1}\big(f(\{x_1\})\big) \not\subseteq \{x_1\}$. Ainsi, la conclusion est fausse avec $A := \{x_1\}$. On a donc montré la contraposée de la réciproque.