Analyse 1

Série 0

Notions de base

Les notions de cette série sont vues dans le cours MAT1500 — Mathématiques discrètes. Puisque le cours n'est pas préalable, il est possible que vous ne puissiez pas faire tous les exercices.

Notation. Pour le cours, l'ensemble des naturels $\mathbb{N}$ ne contient pas 0. Ainsi, on écrit

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}.$$

On écrira $\mathbb{N} \cup \{0\}$ si l'on inclut 0.

Exercice 1. Soit A, B deux ensembles non vides.

a) Donner la définition de ce qu'est une fonction $f\colon A \to B$.

b) Quel est le domaine et le codomaine de f ?

c) Quelle est la différence entre le codomaine et l'image de f ?

Exercice 2. a) Donner la définition d'une fonction injective.

b) Déterminer quelles fonctions parmi les suivantes sont injectives :

i) $\begin{aligned} f\colon \{1,2,3\} &\to \{0,2,4,6\} \\ n &\mapsto 2n \end{aligned}$ *ii)* $\begin{aligned} f\colon \{a,b,c,d\} &\to \{0,1\} \\ a &\mapsto 0 \\ b &\mapsto 1 \\ c &\mapsto 0 \\ d &\mapsto 1 \end{aligned}$ *iii)* $\begin{aligned} f\colon \mathbb{N} &\to \mathbb{Z} \\ n &\mapsto n \end{aligned}$

Exercice 3. a) Donner la définition d'une fonction surjective.

b) Déterminer quelles fonctions du 2b) sont surjectives.

Exercice 4. Soit $A = \{0, 1, 2\}$ et $B = \{a, b\}$.

a) Compter le nombre de fonctions injectives $f\colon A \to B$ possibles.

b) Compter le nombre de fonctions surjectives $f\colon A \to B$ possibles.

Exercice 5. a) Donner la définition d'une fonction bijective.

b) Donner deux exemples de fonctions qui soient bijectives. Donner également un exemple d'une fonction qui n'est pas bijective.

Les exercices 6 à 9 sont plus difficiles. Il est tout de même recommandé d'essayer de les faire et de comprendre les solutions.

Exercice 6. Soit A et B deux ensembles non vides.

a) Montrer qu'une fonction $f\colon A \to B$ est injective si et seulement si elle possède un inverse à gauche.

b) Montrer qu'une fonction $g\colon A \to B$ est surjective si et seulement si elle possède un inverse à droite.

c) Déduire qu'une fonction $h\colon A \to B$ est bijective si et seulement si elle possède un inverse.

Exercice 7. Soit A et B deux ensembles. On rappelle que l'*union* de A et B est

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

et l'*intersection* de A et B est

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Enfin, on dit que $A = B$ si $A \subseteq B$ et $A \supseteq B$, autrement dit $x \in A$ si et seulement si $x \in B$. Soit C un troisième ensemble. Montrer que

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Exercice 8. Soit A, B deux ensembles non vides, $A_1, A_2 \subseteq A$ et $B_1, B_2 \subseteq B$ des sous-ensembles et soit $f\colon A \to B$ une fonction. On rappelle que la *préimage* ou l'*image réciproque* de B_1 par f est

$$f^{-1}(B_1) = \{a \in A \mid f(a) \in B_1\}.$$

L'*image direct* ou simplement l'*image* de A_1 par f est

$$f(A_1) = \{f(a) \in B \mid a \in A_1\}.$$

Montrer les égalités ou les inclusions d'ensembles suivants.

a) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

b) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

c) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$

d) $f^{-1}(B_1^c) = f^{-1}(B_1)^c$ pour tout $B_1 \subseteq B$ (Ici, le c est signifie le complément. On a $B_1^c = B \setminus B_1$ et $f^{-1}(B_1)^c = A \setminus f^{-1}(B_1)$.)

e) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

f) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

g) $f(A_1 \setminus A_2) \supseteq f(A_1) \setminus f(A_2)$

h) si f est injective, alors il y a égalité au f)

i) si pour tout $A_1, A_2 \subseteq X$, on a $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$, alors f est injective

j) si f est injective, alors il y a égalité au g)

k) si pour tout $A_1, A_2 \subseteq X$, on a $f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2)$, alors f est injective.

Exercice 9. Soit A et B deux ensembles non vides, $A_1, A_2 \subseteq A$ deux sous-ensembles et $f\colon A \to B$ une fonction. Soit $b \in f(A_1 \setminus A_2)$. Par définition, il existe $a \in A_1 \setminus A_2$ tel que $f(a) = b$. Il suit que $a \in A_1$ et que $a \notin A_2$ et donc $f(a) \in f(A_1)$ et $f(a) \notin f(A_2)$. D'où il suit que $b = f(a) \in f(A_1) \setminus f(A_2)$. Puisque $b \in f(A_1 \setminus A_2)$ était quelconque, on conclut que $f(A_1 \setminus A_2) \subseteq f(A_1) \setminus f(A_2)$.
Où est l'erreur dans ce raisonnement ?

Exercice 10. Soit X, Y des ensembles non vides et soit $f\colon X \to Y$.

a) Est-ce que $f\big(f^{-1}(B)\big) \subseteq B$ pour tout $B \subseteq Y$?

b) Est-ce que $f\big(f^{-1}(B)\big) \supseteq B$ pour tout $B \subseteq Y$?

c) Est-ce que $f^{-1}\big(f(A)\big) \subseteq A$ pour tout $A \subseteq X$?

d) Est-ce que $f^{-1}\big(f(A)\big) \supseteq A$ pour tout $A \subseteq X$?

e) Pour les énoncés dont la réponse est non, quelle condition sur f est nécessaire et suffisante afin que la réponse devienne oui ?

Remarque. Pour ce genre d'exercice, il est sous-entendu que si la réponse est oui, alors il faut le démontrer et si la réponse est non, alors il faut trouver un contre-exemple.