Analyse 1

Devoir 2

Séries, continuité, dérivée (solutionnaire)

Si vous utilisez un résultat, indiquez d'où il provient (p.ex. « par un théorème du chapitre 4 » ou « par l'exercice 24 de la série 3 »).

Le devoir est à remettre lundi le 25 juillet au début du cours en papier. Je n'accepte pas les devoirs remis par courriel, sauf en situation exceptionnelle. Le devoir est sur 20 points.

Propreté.

1. Si vous tapez votre devoir, vous pouvez l'imprimer recto-verso.
2. Si vous écrivez votre devoir à la main (sur papier ou sur une tablette), vous devez :
   - écrire à double-interligne;
   - écrire recto seulement;
   - écrire sur du papier blanc ou ligné (mais pas quadrillé!);
   - écrire *très* propre et *lisiblement*.

   Si l'un de ces critères n'est pas rempli, vous aurez une journée pour le réécrire en suivant les consignes et vous perdrez des points de retard (1 point par jour).

Question 1. (7pts) Le but de la question est de montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ diverge. On pose $a_n = \frac{n^n}{n!}$.

a) (1pt) Montrer que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to e$.

b) (3pts) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $(e-\varepsilon)^k a_N < a_{N+k} < (e+\varepsilon)^k a_N$. Déduire que $\sqrt[k]{a_{N+k}} \to e$.
Indice. Utilisez le a) et inspirez-vous de la démonstration du critère de d'Alembert.

c) (2pts) Montrer que $\sqrt[n]{a_n} \to e$.
Indice. Écrivez $a_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} \cdots \frac{a_{n+N-2}}{a_{n+N-1}} \frac{a_{n+N-1}}{a_{n+N}} a_{n+N}$.

d) (1pt) Déduire que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ diverge.

Solution. a) C'est un calcul direct. On a

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^n}\\ &= \frac{(n+1)^n}{n!}\frac{n!}{n^n}\\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\ &\longrightarrow e \quad \text{lorsque } n \to \infty.\end{aligned}$$

b) Par le a), il existe $N \in \mathbb{N}$ătel que pour tout $n \geq N$, on a

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - e\right| < \varepsilon \quad &\Leftrightarrow \quad -\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} - e < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad e - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < e + \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad (e-\varepsilon)a_n < a_{n+1} < (e+\varepsilon)a_n \qquad (\text{car } a_n > 0).\end{aligned}$$

Ainsi, pour $k \in \mathbb{N}$, on a $N + k \geq N$, donc il suit que

$$a_{N+k} < (e+\varepsilon)a_{N+k-1} < (e+\varepsilon)^2 a_{N+k-2} < \ldots < (e+\varepsilon)^k a_N.$$

De la même façon, on a $a_{N+k} > (e-\varepsilon)a_{N+k-1}$, ce qui donne $a_{N+k} > (e-\varepsilon)^k a_N$.

Il suit que

$$\begin{aligned}(e-\varepsilon)^k a_N < a_{N+k} < (e+\varepsilon)^k a_N \quad &\Leftrightarrow \quad e - \varepsilon < \frac{\sqrt[k]{a_{N+k}}}{\sqrt[k]{a_N}} < e - \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad \left|\frac{\sqrt[k]{a_{N+k}}}{\sqrt[k]{a_N}} - e\right| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Il suit que $\frac{\sqrt[k]{a_{N+k}}}{\sqrt[k]{a_N}} \to e$ lorsque $k \to \infty$. Puisque $\sqrt[k]{a_N} \to 1$, on conclut que $\sqrt[k]{a_{N+k}} \to e$.

c) Par le a), avec $\varepsilon = \frac{1}{2e}$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, on a $\frac{1}{2e} < \frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{3}{2e}$. Ainsi, pour $n \geq N_1$, on a, d'une part,

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} \cdots \frac{a_{n+N-2}}{a_{n+N-1}} \frac{a_{n+N-1}}{a_{n+N}} a_{n+N} < \left(\tfrac{3}{2e}\right)^N a_{n+N}$$

et, d'autre part,

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} \cdots \frac{a_{n+N-2}}{a_{n+N-1}} \frac{a_{n+N-1}}{a_{n+N}} a_{n+N} > \left(\tfrac{1}{2e}\right)^N a_{n+N}.$$

En combinant et prenant la racine n-ième, on obtient

$$\sqrt[n]{\left(\tfrac{1}{2e}\right)^N} \sqrt[n]{a_{n+N}} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\left(\tfrac{3}{2e}\right)^N} \sqrt[n]{a_{n+N}}.$$

Lorsque $n \to \infty$, par le a), on a que $\sqrt[n]{a_{N+n}} \to e$ et on a $\sqrt[n]{\left(\frac{1}{2e}\right)^N} \to 1$ et $\sqrt[n]{\left(\frac{3}{2e}\right)^N} \to 1$. Par le théorème des deux gendarmes, il suit que $\sqrt[n]{a_n} \to e$.

d) Cela suit directement du critère du quotient. En effet, on a que

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}}{\frac{1}{n}} \to e \neq 0, \infty.$$

Puisque la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge, on conclut que $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ diverge aussi.

Question 2. (5pts) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(0) = 0$.

a) (2pts) Montrer que si f est dérivable en 0, alors il existe une fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $f(x) = xg(x)$.

b) (3pts) On suppose maintenant que $f'(0)$ existe. On pose $h(x) = \sqrt{|xf(x)|}$. Montrer que h est dérivable en 0 si et seulement si $f'(0) = 0$.

Solution. a) On pose

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ f'(0), & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On voit que pour $x \neq 0$, on a

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x}.$$

Ainsi, lorsque $x \to 0$, le côté droit tend vers $f'(0)$, donc on a bien $\lim_{x\to 0} g(x) = f'(0) = g(0)$, d'où g est continue. Pour $x \neq 0$, par définition de g, on a $f(x) = xg(x)$. Pour $x = 0$, on a $f(0) = 0 \cdot g(0) = 0$. Ainsi, on a bien $f(x) = xg(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Puisque f est dérivable en 0, par le a), il existe $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $f(x) = xg(x)$. On a donc $h(x) = \sqrt{|x^2 g(x)|} = |x|\sqrt{|g(x)|}$. Remarquons également que $h(0) = \sqrt{0} = 0$.

$\Rightarrow$) Si h est dérivable en 0, alors $\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|\sqrt{|g(x)|}}{x}$ existe. Ainsi, on a

$$\sqrt{|g(0)|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|\sqrt{|g(x)|}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|\sqrt{|g(x)|}}{x} = -\sqrt{|g(0)|}.$$

Il suit que $g(0) = 0$, c'est-à-dire que $f'(0) = 0$.

$\Leftarrow$) On a simplement

$$h'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|\sqrt{|g(x)|}}{x} = 0,$$

car $g(0) = f'(0) = 0$ et g est continue en 0.

Question 3. (4pts) Soit $f\colon (0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe des suites (a_n) et (b_n) dans $(0, 1]$ telles que

1. $a_n \to 0$ et $b_n \to 0$ et
2. $f(a_n) \to \infty$ et $f(b_n) \to -\infty$.

Montrer que f est surjective, c'est-à-dire que pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe $x \in (0, 1]$ tel que $f(x) = y$.

Solution. Soit $y \in \mathbb{R}$. Puisque $a_n \to \infty$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $f(a_{N_1}) \geq y + 1$. De même, puisque $b_n \to -\infty$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $f(b_{N_2}) \leq y - 1$. Ainsi, par le théorème des valeurs intermédiaires, puisque $f(b_{N_2}) < y < f(a_{N_1})$, il existe x dans (a_{N_1}, b_{N_2}) ou (b_{N_2}, a_{N_1}) tel que $f(x) = y$.

Question 4. (4pts) Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

i) $0 < f(0) < 1$;

ii) $f(1) = 1$;

iii) f est dérivable en 1 et $f'(1) > 1$.

Montrer qu'il existe $x_0 \in (0,1)$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Suggestion. Considérez la fonction $g(x) = f(x) - x$.

Solution. On pose $g(x) = f(x) - x$. On a que $f(x) = 0$ si et seulement si $g(x) = 0$, ainsi on montrera qu'il existe $x_0 \in (0,1)$ tel que $g(x_0) = 0$.

On voit que $g(0) = f(0) > 0$, $g(1) = 0$ et que g est continue. Si on montre qu'il existe $x_1 \in (0,1)$ tel que $g(x_1) < 0$, alors par le théorème des valeurs intermédiaire, on pourra conclure qu'il existe $x_0 \in (0,x_1)$ tel que $g(x_0) = 0$. Par hypothèse, on a $g'(1) = f'(1) - 1 > 0$. Ainsi, par définition de la limite et de $g'(1)$, il existe $\delta > 0$ tel que si $-\delta < h < 0$, alors

$$\left| \frac{g(1+h) - g(1)}{h} - g'(1) \right| < \frac{g'(1)}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{g(1+h) - g(1)}{h} > \frac{g'(1)}{2} > 0.$$

Puisque h est négatif, il suit que $g(1+h) < g(1) = 0$. Ainsi, avec $x_1 = 1 - \frac{\delta}{2}$, on a montré $g(x_1) < 0$ et on obtient la conclusion.

Voici une autre solution. Pour $x \in [0,1]$, on pose

$$k(x) = \begin{cases} \frac{1-f(x)}{1-x}, & \text{si } x \neq 1, \\ f'(1), & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Il est clair que k est continue sur $[0,1)$ et en $x = 1$, on a

$$\lim_{x \to 1^-} k(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1 - f(x)}{1 - x} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1) - f(1-h)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} = f'(1),$$

d'où k est continue en $x = 1$. Par hypothèse, on a $k(0) = 1 - f(0) < 1$ et $k(1) = f'(1) > 1$. Par le théorème des valeurs intermédiaire, il existe $c \in (0,1)$ tel que $k(c) = 1$, c'est-à-dire que $\frac{1-f(c)}{1-c} = 1$, donc $f(c) = c$.