# Analyse 1

## Devoir 2

### Séries, continuité, dérivée

Si vous utilisez un résultat, indiquez d'où il provient (p.ex. « par un théorème du chapitre 4 » ou « par l'exercice 24 de la série 3 »).

Le devoir est à remettre lundi le 25 juillet au début du cours en papier. Je n'accepte pas les devoirs remis par courriel, sauf en situation exceptionnelle. Le devoir est sur 20 points.

**Propreté.**

1. Si vous tapez votre devoir, vous pouvez l'imprimer recto-verso.
2. Si vous écrivez votre devoir à la main (sur papier ou sur une tablette), vous devez :
   - écrire à double-interligne;
   - écrire recto seulement;
   - écrire sur du papier blanc ou ligné (mais pas quadrillé!);
   - écrire *très* propre et *lisiblement*.

   Si l'un de ces critères n'est pas rempli, vous aurez une journée pour le réécrire en suivant les consignes et vous perdrez des points de retard (1 point par jour).

**Question 1.** (7pts) Le but de la question est de montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ diverge. On pose $a_n = \frac{n^n}{n!}$.

a) (1pt) Montrer que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to e$.

b) (3pts) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $(e-\varepsilon)^k a_N < a_{N+k} < (e+\varepsilon)^k a_N$. Déduire que $\sqrt[k]{a_{N+k}} \to e$.
*Indice.* Utilisez le a) et inspirez-vous de la démonstration du critère de d'Alembert.

c) (2pts) Montrer que $\sqrt[n]{a_n} \to e$.
*Indice.* Écrivez $a_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} \cdots \frac{a_{n+N-2}}{a_{n+N-1}} \frac{a_{n+N-1}}{a_{n+N}} a_{n+N}$.

d) (1pt) Déduire que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ diverge.

**Question 2.** (5pts) Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(0) = 0$.

a) (2pts) Montrer que si $f$ est dérivable en 0, alors il existe une fonction $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $f(x) = xg(x)$.

b) (3pts) On suppose maintenant que $f'(0)$ existe. On pose $h(x) = \sqrt{|xf(x)|}$. Montrer que $h$ est dérivable en 0 si et seulement si $f'(0) = 0$.

**Question 3.** (4pts) Soit $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe des suites $(a_n)$ et $(b_n)$ dans $(0,1]$ telles que

1. $a_n \to 0$ et $b_n \to 0$ et
2. $f(a_n) \to \infty$ et $f(b_n) \to -\infty$.

Montrer que $f$ est surjective, c'est-à-dire que pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe $x \in (0,1]$ tel que $f(x) = y$.

**Question 4.** (4pts) Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

*i*) $0 < f(0) < 1$;

*ii*) $f(1) = 1$;

*iii*) $f$ est dérivable en 1 et $f'(1) > 1$.

Montrer qu'il existe $x_0 \in (0,1)$ tel que $f(x_0) = x_0$.

*Suggestion.* Considérez la fonction $g(x) = f(x) - x$.