Analyse 1

Devoir 1 — Été 2023

Nombres réels et suites (solutionnaire)

Vous pouvez utiliser les résultats et les exercices des chapitres 1 et 2 seulement (en moins que l'exercice soit la même question). Si vous utilisez un résultat, indiquez d'où il provient, p.ex. « par un théorème du chapitre 1 » ou « par l'exercice 42 de la série 2 ».

Le devoir est à remettre vendredi 2 juin avant midi en papier, dans le casier indiqué au 5e étage du pav. André-Aisenstadt. Je n'accepte pas les devoirs remis par courriel, sauf en situation exceptionnelle.

Propreté.

1. Si vous tapez votre devoir, vous pouvez l'imprimer recto-verso.
2. Si vous écrivez votre devoir à la main (sur papier ou sur une tablette), vous devez :
   - écrire à double-interligne;
   - écrire recto seulement;
   - écrire sur du papier blanc ou ligné (mais pas quadrillé!);
   - écrire *très* propre et *lisiblement*.

   Si l'un de ces critères n'est pas rempli, vous aurez une journée pour le réécrire en suivant les consignes et vous perdrez des points de retard (10% point par jour).

Question 1. (9 pts) Pour cette question, on tient pour acquis que pour tout $p, q \in \mathbb{Q}$ tels que $0 \leq p < q$, on a $x^p < x^q$, pourvu que $x > 1$, et on a $x^{p+q} = x^p x^q$.

Soit $x > 1$ et $y > 0$. On pose

$$E := \{x^p \in \mathbb{R} \mid p \in \mathbb{Q} \text{ et } 0 \leq p < y\},$$

$$F := \{x^q \in \mathbb{R} \mid q \in \mathbb{Q} \text{ et } q > y\}.$$

a) (2 pts) Montrer que $\sup E$ et $\inf F$ existent.

On pose $S := \sup E$ et $I := \inf F$. Le but du reste de la question est de montrer que $S = I$ à l'aide des étapes suivantes.

b) (2 pts) Montrer que $S \leq I$.

c) (1 pt) Il faut maintenant montrer que $S \geq I$. Supposer le contraire, c'est-à-dire que $S < I$. Il existe alors $\varepsilon > 1$ tel que $I = \varepsilon S$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt[N]{x} < \varepsilon$. *Indice.* Considérer $1 + (\varepsilon - 1)$ et utiliser l'inégalité de Bernoulli.

d) (2 pts) Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{Q}$ positif tel que $r < y < r + \frac{1}{N}$.

e) (2 pts) Montrer que $x^{r+\frac{1}{N}} < I$ et déduire que cela est une contradiction. Conclure que $S = I$.

Remarque. Le nombre $S = I$ n'est nul autre que x^y. Ceci est une façon possible de définir l'exposant pour un nombre irrationnel.

Solution. a) Le but est d'appliquer l'axiome de complétude. Montrons d'abord que E et F sont non vides. Pour E, on voit que $0 < y$ et donc $x^0 = 1 \in E$. Pour F, par la propriété d'Archimède, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > y$. Ainsi, on a $x^n \in F$.

Pour voir que E est majoré et que F est minoré, on montre la proposition suivante : pour tout $x^p \in E$, pour tout $x^q \in F$, on a $x^p < x^q$. En effet, dans ce cas, par définition de E et de F, on a $p < y < q$. Il suit, par une propriété donnée dans l'énoncé, qu'alors $x^p < x^q$. Ceci démontre la proprosition.

Pour voir que E est majoré, si on fixe $q > y$ rationnel, de sorte que $x^q \in F$; on obient que pour tout $e \in E$, on a $e < x^q$, d'où x^q est un majorant de E. De même, pour un $p \in \mathbb{Q}$ avec $0 \leq p < y$ fixé, on a $x^p < f$ pour tout $f \in F$, d'où x^p est un minorant de F.

Par l'axiome de complétude, on conclut que $\sup E$ et $\inf F$ existent. Remarque : pour montrer que l'axiome de complétude s'applique à F, il suffit de constater que si F est minoré, alors $-F = \{-y \mid y \in F\}$ est majoré et de montrer que $\sup(-F) = -\inf F$. Une autre façon de procéder est de montrer que $F' := \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ est un minorant de } F\}$ est non vide et majoré et de montrer que $\sup F'$ est l'infimum de F. Dans tous les cas, je ne pénalise pas si cela n'a pas été fait.

b) Au a), on a montré que pour tout $x^p \in E$ et tout $x^q \in F$, on a $x^p < x^q$. On obtient donc

$$\begin{aligned}
\forall x^p \in E, \forall x^q \in F,\ x^p < x^q \quad &\Rightarrow \quad \forall x^p \in E, \underbrace{\left[\forall x^q \in F,\ x^p < x^q\right]}_{\Rightarrow\, x^p \text{ minorant de } F} \\
&\Rightarrow \quad \forall x^p \in E,\ x^p \leq I \qquad \text{(car } x^p \text{ est un minorant de } F) \\
&\Rightarrow \quad \underbrace{\forall x^p \in E,\ x^p \leq I}_{\Rightarrow\, I \text{ majorant de } E} \\
&\Rightarrow \quad S \leq I \qquad \text{(car } I \text{ est un majorant de } E).
\end{aligned}$$

c) On aura $\sqrt[N]{x} < \varepsilon$ si et seulement si $x < \varepsilon^N$. Puisque $\varepsilon > 1$, on a que $\varepsilon - 1 > 0$, donc, par le propriété d'Archimède, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N(\varepsilon - 1) > x$. Par l'inégalité de Bernoulli, on obtient $\big(1 + (\varepsilon - 1)\big)^N \geq 1 + N(\varepsilon - 1) > 1 + x > x$. Ainsi, pour ce $N \in \mathbb{N}$, on a bien $\varepsilon^N > x$, c'est-à-dire $\varepsilon > \sqrt[N]{x}$.

d) Par la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $y - \frac{1}{N} < r < y$. Ainsi, il suit que $y < r + \frac{1}{N} < y + \frac{1}{N}$. De par la première inégalité, on a $y - \frac{1}{N} < r$ et de par la seconde, $y < r + \frac{1}{N}$.

e) D'abord, remarquons que $y - \frac{1}{N} < r$ et comme $y > 1$ et $\frac{1}{N} \leq 1$, il suit que $r > 0$.

Puisque $0 \leq r < y < r + \frac{1}{N}$, il suit que $x^r \in E$ et $x^{r+\frac{1}{N}} \in F$, par définition de E et de F. Or, on a que

$$x^{r+\frac{1}{N}} = x^{\frac{1}{N}} x^r < \varepsilon x^r \leq \varepsilon \sup E = \varepsilon S = I,$$

ce qui est une contradiction. En effet, $x^{r+\frac{1}{N}} \in F$ et I est un minorant de F, donc on doit avoir $x^{r+\frac{1}{N}} \geq I$.

On peut finalement conclure que $I \leq S$ et donc, avec le b), que $I = S$.

Question 2. (3 pts) Soit A et B deux ensembles dénombrables. On rappelle que le produit cartésien $A \times B$ est l'ensemble des couples des éléments de A et de B, plus précisément

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Montrer que $A \times B$ est dénombrable.

Solution. Puique A est dénombrable, on peut l'écrire comme une liste $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\}$. De même, puisque B est dénombrable, on peut l'écrire comme une liste $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots\}$. Ainsi, le produit cartésien est l'ensemble $A \times B = \{(a_i, b_j) \mid i, j \in \mathbb{N}\}$. On utilise maintenant un argument similaire à celui des rationnels. On place les éléments de $A \times B$ dans un tableau et on construit la liste en prenant les diagonales :

$$\begin{array}{ccccc}
(a_1, b_1) & (a_1, b_2) & (a_1, b_3) & (a_1, b_4) & \cdots \\
(a_2, b_1) & (a_2, b_2) & (a_2, b_3) & (a_2, b_4) & \cdots \\
(a_3, b_1) & (a_3, b_2) & (a_3, b_3) & (a_3, b_4) & \cdots \\
(a_4, b_1) & (a_4, b_2) & (a_4, b_3) & (a_4, b_4) & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

En suivant les diagonales de sud-ouest vers nord-est, on obtient $(a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_1, b_2), (a_3, b_1), (a_2, b_2), (a_1, b_3), \ldots$. Il n'y a pas de répétition, car si $(a_i, b_j) = (a_m, b_n)$, alors $a_i = a_m$, auquel cas $i = j$, car il n'y a pas de répétition dans la liste des a_i, et $b_j = b_n$ et donc $j = n$ pour la même raison. C'est une liste infinie qui contient tous les éléments de $A \times B$. (Si on arrête ici, c'est suffisant comme argument.)

(Cette partie est facultative.) Voici une façon possible de trouver une bijection. Dans la liste ci-haut, un·e observat·eur·rice avisé·e remarquera un motif. Les termes de la i-ième diagonale sont $(a_i, b_1), (a_{i-1}, b_2), \ldots, (a_2, b_{i-1}), (a_1, b_i)$ et il y en a i. Il y a eu $1 + 2 + 3 + \cdots + i - 1 = \frac{(i-1)i}{2}$ termes avant cette diagonale. On pose $n_i = \frac{(i-1)i}{2}$, le nombre d'éléments dans les diagonales 1, 2,..., $i - 1$. On peut partionner $\mathbb{N}$ en

$$\{1\} \cup \{n_2 + 1, n_2 + 2\} \cup \{n_3 + 1, n_3 + 2, n_3 + 3\} \cup \cdots \cup \big([n_i + 1, n_i + i] \cap \mathbb{N}\big) \cup \cdots.$$

Pour $j \in \mathbb{N}$, il existe un unique $i \in \mathbb{N}$ et un unique reste $1 \leq r \leq i$ tel que $j \in [n_i + 1, n_i + i] \cap \mathbb{N}$ et $j = n_i + r$. On définit

$$\begin{aligned} \varphi \colon \mathbb{N} &\to A \times B \\ j &\mapsto (a_{i-r+1}, b_i). \end{aligned}$$

Pour l'injectivité, si $\varphi(j) = \varphi(k)$, cela veut dire que $\varphi(j)$ et $\varphi(k)$ sont dans la même diagonale, disons la i-ième, donc $j, k \in [n_i + 1, n_i + i] \cap \mathbb{N}$. Ensuite, si $j = n_i + r$ et $k = n_i + q$, avec $1 \leq r, q \leq i$, on aura $\varphi(j) = (a_{i-r+1}, b_r) = (a_{i-q+1}, b_q) = \varphi(k)$. Ainsi, comme $a_{i-r+1} = a_{i-q+1}$, on doit avoir $i - r + 1 = i - q + 1$, car la liste des a_j n'a pas de répétition, d'où $r = q$ et donc $j = k$.

Pour la surjectivité, soit $(a_j, b_k) \in A \times B$. Cette élément se trouve dans la $(j+k-1)$-ième diagonale, on pose donc $i = j + k - 1$. Puisque $1 \leq k \leq i$, on aura $\varphi(n_i + k) = (a_{i-k+1}, b_k) = (a_j, b_k)$, car $i - k + 1 = j$.

En fait, ce dernière argument permet d'entrevoir une expression pour l'inverse de φ :

$$\varphi^{-1}(a_j, b_k) = n_{j+k-1} + k = \frac{(j + k - 2)(j + k - 1)}{2} + k.$$

Question 3. (2 pts) Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ un ouvert. Montrer qu'il existe des nombres $a_i < b_i$ ($i \in I$) tels que

$$A = \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i),$$

c'est-à-dire que A est l'union d'intervalles ouverts.

Solution. Pour chaque $x \in A$, il existe $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \subseteq A$, car A est ouvert. On remarque que $B(x, r_x) = (x - r_x, x + r_x)$ est un intervalle ouvert. On voit que

$$A \subseteq \bigcup_{x \in A} B(x, r_x) \ \text{car } x \in B(x, r_x) \text{ pour tout } x \in A, \qquad \text{et} \qquad A \supseteq \bigcup_{x \in A} B(x, r_x) \ \text{car } B(x, r_x) \subseteq A \text{ pour tout } x \in A.$$

Ainsi, il suit que

$$A = \bigcup_{x \in A} B(x, r_x) = \bigcup_{x \in A} (x - r_x, x + r_x).$$

On obtient la conclusion en posant $I := A$ et, pour chaque $x \in I$, $a_x := x - r_x$ et $b_x := x + r_x$.

Question 4. Soit (a_n) une suite qui converge vers $L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$b_n := \begin{cases} a_n, & \text{si } a_n \neq 0, \\ 1, & \text{si } a_n = 0. \end{cases}$$

a) Montrer que (b_n) converge vers L.

b) Montrer que $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ converge vers $\frac{1}{L}$ en utilisant la définition de convergence.

Solution. a) Puisque $a_n \to L \neq 0$, il suit que $|a_n| \to |L| \neq 0$. Ainsi, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, alors $\big||a_n| - |L|\big| < \frac{|L|}{2}$. Il suit que $0 < \frac{|L|}{2} < |a_n|$, d'où $a_n \neq 0$ pour tout $n \geq N$. Autrement dit, par définition de b_n, on a $b_n = a_n$ pour tout $n \geq N$. On a donc

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_{n+N} = \lim_{n\to\infty} a_{n+N} = L. \qquad \text{(Série 2, exercice 6)}$$

b) Comme $b_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite est bien définie. Comme au a), il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq M$, alors $0 < \frac{|L|}{2} < |b_n|$. Pour $n \geq M$, on a

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{L}\right| = \frac{|L - b_n|}{|b_n L|} < \frac{|L - b_n|}{\frac{|L|}{2}|L|} = \frac{2|L - b_n|}{L^2}.$$

Ensuite, soit $\varepsilon > 0$. Puisque $b_n \to L$, il existe $M_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq M_1$, on a $|b_n - L| < \frac{L^2 \varepsilon}{2}$. (Remarque : il est nécessaire que $L \neq 0$, car il faut $\frac{L^2\varepsilon}{2} > 0$.) Ainsi, pour $n \geq \max\{M, M_1\}$, on a

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{L}\right| = \frac{|L - b_n|}{|b_n L|} < \frac{2|L - b_n|}{L^2} < \frac{2L^2\varepsilon}{2L^2} = \varepsilon.$$

D'où $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{L}$.