Analyse 1

Devoir 1 — Été 2023

Nombres réels et suites

Vous pouvez utiliser les résultats et les exercices des chapitres 1 et 2 seulement (en moins que l'exercice soit la même question). Si vous utilisez un résultat, indiquez d'où il provient, p.ex. « par un théorème du chapitre 1 » ou « par l'exercice 42 de la série 2 ».

Le devoir est à remettre vendredi 2 juin avant midi en papier, dans le casier indiqué au 5e étage du pav. André-Aisenstadt. Je n'accepte pas les devoirs remis par courriel, sauf en situation exceptionnelle.

Propreté.

1. Si vous tapez votre devoir, vous pouvez l'imprimer recto-verso.
2. Si vous écrivez votre devoir à la main (sur papier ou sur une tablette), vous devez :
   - écrire à double-interligne;
   - écrire recto seulement;
   - écrire sur du papier blanc ou ligné (mais pas quadrillé!);
   - écrire *très* propre et *lisiblement*.

   Si l'un de ces critères n'est pas rempli, vous aurez une journée pour le réécrire en suivant les consignes et vous perdrez des points de retard (10% point par jour).

Question 1. Pour cette question, on tient pour acquis que pour tout $p, q \in \mathbb{Q}$ tels que $0 \leq p < q$, on a $x^p < x^q$, pourvu que $x > 1$, et on a $x^{p+q} = x^p x^q$.

Soit $x > 1$ et $y > 0$. On pose

$$E := \{x^p \in \mathbb{R} \mid p \in \mathbb{Q} \text{ et } 0 \leq p < y\},$$
$$F := \{x^q \in \mathbb{R} \mid q \in \mathbb{Q} \text{ et } q > y\}.$$

a) Montrer que $\sup E$ et $\inf F$ existent.

On pose $S := \sup E$ et $I := \inf F$. Le but du reste de la question est de montrer que $S = I$ à l'aide des étapes suivantes.

b) Montrer que $S \leq I$.

c) Il faut maintenant montrer que $S \geq I$. Supposer le contraire, c'est-à-dire que $S < I$. Il existe alors $\varepsilon > 1$ tel que $I = \varepsilon S$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt[N]{x} < \varepsilon$.
Indice. Considérer $1 + (\varepsilon - 1)$ et utiliser l'inégalité de Bernoulli.

d) Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{Q}$ positif tel que $r < y < r + \frac{1}{N}$.

e) Montrer que $x^{r+\frac{1}{N}} < I$ et déduire que cela est une contradiction. Conclure que $S = I$.

Remarque. Le nombre $S = I$ n'est nul autre que x^y. Ceci est une façon possible de définir l'exposant pour un nombre irrationnel.

Question 2. Soit A et B deux ensembles dénombrables. On rappelle que le produit cartésien $A \times B$ est l'ensemble des couples des éléments de A et de B, plus précisément

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Montrer que $A \times B$ est dénombrable.

Question 3. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ un ouvert. Montrer qu'il existe des nombres $a_i < b_i$ $(i \in I)$ tels que

$$A = \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i),$$

c'est-à-dire que A est l'union d'intervalles ouverts.

Question 4. Soit (a_n) une suite qui converge vers $L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$b_n := \begin{cases} a_n, & \text{si } a_n \neq 0, \\ 1, & \text{si } a_n = 0. \end{cases}$$

a) Montrer que (b_n) converge vers L.

b) Montrer que $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ converge vers $\frac{1}{L}$ en utilisant la définition de convergence.