Analyse 1

Examen intra

Enseignant : Jonathan Godin — Vendredi le 16 juin 2022
Session : E23

Aucun matériel permis. L'examen est sur 35 points et il dure 1h50 (110 minutes). **Justifiez toutes vos réponses.**

Rappel : la partie entière de $x \in \mathbb{R}$ est l'unique entier $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ tel que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Question 1. (10pts) Vrai ou faux. Répondez à 2 questions parmi A, B et C. Vous pouvez faire la question exclue pour un bonus tout-ou-rien de 2 points. **Indiquez clairement** laquelle est faite en bonus. **Justifiez vos réponses.** (Vous ne pouvez pas faire appel au résultat d'un exercice.)

A. L'ensemble $I = (0,2) \cup \{3\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

B. Si A est un ensemble dénombrable et B est un ensemble fini, alors $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$ est dénombrable.

C. Soit $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction. Si $f(x) \to 1$ lorsque $x \to 0$, alors $f(0) = 1$.

Questions courtes.

Question 2. (6pts) Soit $A, B \subseteq \mathbb{R}$ des ensembles non vides tels que pour tout $a \in A$ et pour tout $b \in B$, on a $a \leq b$. Montrer que $\sup A \leq \inf B$.

Question 3. (6pts) Soit (a_n) une suite telle que $a_{2n} \to L_1$ et $a_{2n+1} \to L_2$, où $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$. Montrer que si $a_{3n} \to M \in \mathbb{R}$, alors $L_1 = M$ et $L_2 = M$.

Question longue.

Question 4. Soit $x > 0$.

a) (2pts) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, alors $\frac{1}{2^n+1} \leq x$.

b) (3pts) Montrer que pour tout $n \geq N$, il existe $k(n) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{k(n)}{2^n+1} \leq x < \frac{k(n)+1}{2^n+1}.$$

c) (3pts) Montrer que $\frac{k(n)}{2^n+1} \to x$ lorsque $n \to \infty$.

d) (5pts) On pose $E := \left\{\frac{k}{2^n+1} \;\middle|\; k, n \in \mathbb{N}, \frac{k}{2^n+1} \leq x\right\}$. Montrer que $\sup E$ existe et calculer $\sup E$. (Justifiez bien !)