Analyse 1

Examen intra (solutionnaire partiel)

Enseignant : Jonathan Godin — Vendredi le 16 juin 2022
Session : E23

Aucun matériel permis. L'examen est sur 35 points et il dure 1h50 (110 minutes). **Justifiez toutes vos réponses.**

Rappel : la partie entière de $x \in \mathbb{R}$ est l'unique entier $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ tel que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Question 1. (10pts) Vrai ou faux. Répondez à 2 questions parmi A, B et C. Vous pouvez faire la question exclue pour un bonus tout-ou-rien de 2 points. **Indiquez clairement** laquelle est faite en bonus. **Justifiez vos réponses.** (Vous ne pouvez pas faire appel au résultat d'un exercice.)

A. L'ensemble $I = (0, 2) \cup \{3\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Solution. Faux. On voit que $B(3, 1) \not\subseteq I$, donc $3 \in I$ n'est pas un point intérieur de I, donc I n'est pas ouvert.

B. Si A est un ensemble dénombrable et B est un ensemble fini, alors $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ est dénombrable.

Solution. Vrai. Puisque A est dénombrable, on peut écrire une liste $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de ses éléments. Soit $b_1, \ldots, b_n$ les éléments de B. On peut faire la liste de $A \times B$ comme suit

$$(a_1, b_1), \ldots, (a_1, b_n), (a_2, b_1), \ldots, (a_2, b_n), (a_3, b_1), \ldots, (a_3, b_n), (a_4, b_1), \ldots$$

C. Soit $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction. Si $f(x) \to 1$ lorsque $x \to 0$, alors $f(0) = 1$.

Solution. Faux. Il y a plusieurs exemples possibles, il suffit de prendre une fonction qui n'est pas continue en 0. Voici un tel exemple :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq 0, \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Pour $x \neq 0$, on a $f(x) = 0$, donc $f(x) = 0 \to 0$ lorsque $x \to 0$. Par contre, $f(0) = 1 \neq f(0)$.

Questions courtes.

Question 2. (6pts) Soit $A, B \subseteq \mathbb{R}$ des ensembles non vides tels que pour tout $a \in A$ et pour tout $b \in B$, on a $a \leq b$. Montrer que $\sup A \leq \inf B$.

Solution. Soit $b \in B$ quelconque. Par hypothèse, on a que $a \leq b$ pour tout $a \in A$, donc b est un majorant de A. Ainsi, il suit que $\sup A \leq b$. Puisque b était quelconque, on déduit que $\sup A \leq b$ pour tout $b \in B$, donc $\sup A$ est un minorant de B. Il suit que $\sup A \leq \inf B$.

Question 3. (6pts) Soit (a_n) une suite telle que $a_{2n} \to L_1$ et $a_{2n+1} \to L_2$, où $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$. Montrer que si $a_{3n} \to M \in \mathbb{R}$, alors $L_1 = M$ et $L_2 = M$.

Solution. La suite (a_{6n}) est un sous-suite de (a_{2n}) et de (a_{3n}). Puisque $a_{2n} \to L_1$, on déduit que $a_{6n} \to L_1$. De même, puisque $a_{3n} \to M$, on déduit que $a_{6n} \to M$. Par unicité de la limite, on doit avoir $L_1 = M$.

On répète l'argument précédent avec la suite (a_{6n+3}), qui est une sous-suite de (a_{2n+1}) et de (a_{3n}). Ceci permet d'obtenir $M = L_2$.

Question longue.

Question 4. Soit $x > 0$.

a) (2pts) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, alors $\frac{1}{2^n+1} \leq x$.

b) (3pts) Montrer que pour tout $n \geq N$, il existe $k(n) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{k(n)}{2^n+1} \leq x < \frac{k(n)+1}{2^n+1}.$$

c) (3pts) Montrer que $\frac{k(n)}{2^n+1} \to x$ lorsque $n \to \infty$.

d) (5pts) On pose $E := \left\{ \frac{k}{2^n+1} \;\middle|\; k, n \in \mathbb{N}, \frac{k}{2^n+1} \leq x \right\}$. Montrer que $\sup E$ existe et calculer $\sup E$. (Justifiez bien !)

Solution. a) On a vu en classe que $2^n \to \infty$, d'où $\frac{1}{2^n+1} \to 0$. Ainsi, avec $\varepsilon = x$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $\frac{1}{2^n+1} = \left|\frac{1}{2^n+1} - 0\right| < x$.

b) L'inégalité que l'on veut montrer peut s'écrire $k(n) \leq x(2^n+1) \leq k(n)+1$. Ceci nous indique qu'on doit poser $k(n) := \lfloor x(2^n+1) \rfloor$. On a alors

$$k(n) \leq x(2^n+1) < k(n)+1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{k(n)}{2^n+1} \leq x < \frac{k(n)+1}{2^n+1}.$$

c) Il suffit de soustraire $\frac{k(n)}{2^n+1}$ dans $\frac{k(n)}{2^n+1} \leq x < \frac{k(n)+1}{2^n+1}$:

$$0 \leq x - \frac{k(n)}{2^n+1} \leq \frac{1}{2^n+1}.$$

Par le théorème des deux gendarmes, on voit que $\frac{k(n)}{2^n+1} - x \to 0$.

d) Par le a), il est clair que $\frac{k(N)}{2^N+1} \in E$, donc E est non vide. Par la définition de E, il est clair que x est un majorant de E. On déduit par l'axiome de complétude que $\sup E$ existe.

Pour montrer que $\sup E = x$, on considère $S < x$. Dans ce cas, on a $\varepsilon := x - S > 0$, et donc, par le c), il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N_1$, alors $x - \frac{k(n)}{2^n+1} < \varepsilon$. Il suit que $\frac{k(N_1)}{2^{N_1}+1} > S$, d'où S n'est pas un majorant de E. On conclut que x est le plus petit majorant de E.