Analyse 1

Examen intra

Enseignant : Jonathan Godin — Mardi le 14 juin 2022
Session : E22

Aucun matériel permis. L'examen est sur 40 points et il dure 1h50 (110 minutes). **Justifiez toutes vos réponses,** sauf les choix multiples.

Question 1. (6pts) Choix multiple. Choisir l'énoncé vrai le plus haut dans la liste. Répondez dans votre cahier d'examen et ne donnez qu'*une seule* réponse. Par exemple, si b), d) et e) sont vrais, alors la réponse attendue est b).
Pondération : 3pts pour l'énoncé vrai le plus haut dans la liste; -1pt pour une réponse fausse; 1pt pour un autre énoncé vrai.

A. Soit $A = \left\{ \frac{k}{2^n - 1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, 1 \leq k < n \right\}$.

a) A est dénombrable, car il contient les rationnels.

b) A est dénombrable, car il est contenu dans les rationnels.

c) A n'est pas dénombrable, car il contient les rationnels.

d) A n'est pas dénombrable, car il est dense dans $[0, 1]$.

e) A est dénombrable.

f) A n'est pas dénombrable.

B. Soit l'inéquation $\frac{|x-1|}{x^2-1} < 1$.

a) Si $x \leq -2$, alors elle est vraie.

b) Elle est vraie si et seulement si $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$.

c) Si $x \in (-2, -1)$, alors elle n'est pas vérifiée.

d) Si $x > 1$, alors elle est vraie.

e) Aucune de ces réponses n'est vraie.

Question 2. (12pts) Vrai ou faux. Si l'énoncé est vrai, le montrer. S'il est faux, changer *un seul* mot pour qu'il devienne vrai et montrer le nouvel énoncé. (Vous ne pouvez pas changer un symbole mathématique, seulement un mot.)

A. L'ensemble $\mathbb{Z}$ est un ensemble ouvert de $\mathbb{R}$.

B. Soit (a_n) une suite de nombres rationnels. Si (a_n) converge vers L, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $a_n = L$.

Question 3. (10pts) Soit (a_n) une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2^n}$. Montrer que (a_n) est une suite de Cauchy.

Suite au verso

Question 4. (12pts)

a) Soit $b > 1$. Montrer que pour tout $p, q \in \mathbb{Q}$, si $0 \leq p < q$, alors on a $b^p < b^q$.
Suggestion. Commencez par le cas où p, q sont des entiers positifs.

b) Soit $b > 1$. Pour $x > 0$, on définit b^x par

$$b^x := \sup\{b^r \mid r \in \mathbb{Q} \text{ et } 0 \leq r < x\}.$$

Montrer que si $0 < x < y$, alors $b^x < b^y$.
Indice. Argumentez d'abord qu'il existe $p, q \in \mathbb{Q}$ tels que $x < p < q < y$.

Bonus. (3pts) Calculer la limite suivante, si elle existe :

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+2} + \cdots + \frac{n}{n+n} \right).$$

(Vous pouvez utiliser le fait que $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, si nécessaire.)