Analyse 1

Examen intra (solutionnaire partiel)

Enseignant : Jonathan Godin — Mardi le 14 juin 2022
Session : E22

Aucun matériel permis. L'examen est sur 40 points et il dure 1h50 (110 minutes). **Justifiez toutes vos réponses,** sauf les choix multiples.

Question 1. (6pts) Choix multiple. Choisir l'énoncé vrai le plus haut dans la liste. Répondez dans votre cahier d'examen et ne donnez qu'*une seule* réponse. Par exemple, si b), d) et e) sont vrais, alors la réponse attendue est b).
Pondération : 3pts pour l'énoncé vrai le plus haut dans la liste; -1pt pour une réponse fausse; 1pt pour un autre énoncé vrai.

A. Soit $A = \left\{ \frac{k}{2^n-1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, 1 \leq k < n \right\}$.

a) A est dénombrable, car il contient les rationnels.

b) A est dénombrable, car il est contenu dans les rationnels.

c) A n'est pas dénombrable, car il contient les rationnels.

d) A n'est pas dénombrable, car il est dense dans $[0, 1]$.

e) A est dénombrable.

f) A n'est pas dénombrable.

Solution. L'ensemble A est contenu dans les rationnels, car si k et n sont entiers, alors $\frac{k}{2^n-1}$ est rationnel. Ainsi, A est dénombrable, puisque que $A \subseteq \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}$ est dénombrable. Voir l'exercice 43 de la série 1.

La première réponse vraie est b). Le e) était également vrai.

B. Soit l'inéquation $\frac{|x-1|}{x^2-1} < 1$.

a) Si $x \leq -2$, alors elle est vraie.

b) Elle est vraie si et seulement si $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$.

c) Si $x \in (-2, -1)$, alors elle n'est pas vérifiée.

d) Si $x > 1$, alors elle est vraie.

e) Aucune de ces réponses n'est vraie.

Solution. L'inégalité est vraie si et seulement si $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, \infty) \setminus \{1\}$. Ainsi, le premier énoncé vrai est c).

Question 2. (12pts) Vrai ou faux. Si l'énoncé est vrai, le montrer. S'il est faux, changer *un seul* mot pour qu'il devienne vrai et montrer le nouvel énoncé. (Vous ne pouvez pas changer un symbole mathématique, seulement un mot.)

A. L'ensemble $\mathbb{Z}$ est un ensemble ouvert de $\mathbb{R}$.

Solution. Faux. Si on remplace « ouvert » par « fermé », alors l'énoncé devient vrai. Pour le montrer, on montre que $\mathbb{Z}^c$ est ouvert. On a

$$\mathbb{Z}^c = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1).$$

Puisque $(n, n+1)$ est ouvert pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et que l'union d'ouverts est un ouvert, on voit que $\mathbb{Z}^c$ est ouvert, d'où $\mathbb{Z}$ est fermé. (Voir l'exercice 50 de la série 1.)

Il pourrait y avoir plus d'une réponses possibles.

B. Soit (a_n) une suite de nombres rationnels. Si (a_n) converge vers L, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $a_n = L$.

Solution. Faux. Si on remplace « rationnels » par « entiers » ou « naturels », l'énoncé devient vrai. Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a

$$|a_n - L| < \tfrac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad -\tfrac{1}{2} + L < a_n < L + \tfrac{1}{2}.$$

Puisque a_n est un entier, on doit avoir que a_n est l'unique entier de $(L - \frac{1}{2}, L + \frac{1}{2})$, disons K. Ainsi, (a_n) est une suite constante à partir de N, donc $a_n = K$ pour tout $n \geq N$. Il s'ensuit que $a_n \to K$ lorsque $n \to \infty$ et puisque la limite est unique, on a $K = L$. D'où $a_n = L$ pour tout $n \geq N$.

Il pourrait y avoir plus d'une réponses possibles.

Question 3. (10pts) Soit (a_n) une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2^n}$. Montrer que (a_n) est une suite de Cauchy.

Solution. On a

$$\begin{aligned}
|a_{n+k} - a_n| &\leq |a_{n+k} - a_{n+k-1}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \\
&\leq \frac{1}{2^{n+k-1}} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\
&= \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2^{k-1} + \cdots + 1}\right) \\
&= \frac{1}{2^n}\frac{1 - \frac{1}{2^k}}{1 - \frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{2^n}\frac{1}{1 - \frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Puisque la dernière inégalité tend vers 0 lorsque $n \to \infty$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, alors

$$|a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'où (a_n) est Cauchy.

Question 4. (12pts)

a) Soit $b > 1$. Montrer que pour tout $p, q \in \mathbb{Q}$, si $0 \leq p < q$, alors on a $b^p < b^q$.
Suggestion. Commencez par le cas où p, q sont des entiers positifs.

b) Soit $b > 1$. Pour $x > 0$, on définit b^x par

$$b^x := \sup\{b^r \mid r \in \mathbb{Q} \text{ et } 0 \leq r < x\}.$$

Montrer que si $0 < x < y$, alors $b^x < b^y$.
Indice. Argumentez d'abord qu'il existe $p, q \in \mathbb{Q}$ tels que $x < p < q < y$.

Solution. a) Si $p = n$ et $p = m$, où $n, m \in \mathbb{N}$ et $n < m$, alors il existe $k > 0$ entier tel que $m = n + k$. Ainsi, puisque $b > 1$, il suit que $b^n < b^n b = b^{n+1} < \cdots < b^{n+k} = b^m$.

Ensuite, pour $p = \frac{a}{e}$ et $q = \frac{c}{d}$, où $a, e, c, d \in \mathbb{N}$, tels que $p < q$, on a $ad < ec$ et il suit que $b^{ad} < b^{ec}$. On prend la racine e-ième et d-ième des deux côtés pour obtenir $b^{\frac{a}{e}} < b^{\frac{c}{d}}$, comme voulu.

b) Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $p \in \mathbb{Q}$ tel que $x < p < y$. Pour la même raison, il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $p < q < y$. Ainsi, on a $x < p < q < y$.

Ensuite, pour tout rationnel $r < x$, on a $r < p$ et donc $b^r < b^p$, par le a). Ainsi, b^p est un majorant de $\{b^r \mid r \in \mathbb{Q} \text{ et } r < x\}$, donc il suit que $b^x \leq b^p$, puisque b^x est le supremum de cet ensemble.

Enfin, on voit que $b^q \in \{b^r \mid r \in \mathbb{Q} \text{ et } r < y\}$ et comme b^y est le supremum de cet ensemble, on doit avoir $b^q \leq b^y$. Ainsi, on a $b^x \leq b^p < b^q \leq b^y$.

Bonus. (3pts) Calculer la limite suivante, si elle existe :

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+2} + \cdots + \frac{n}{n+n} \right).$$

(Vous pouvez utiliser le fait que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, si nécessaire.)

Solution. On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+2} + \cdots + \frac{n}{n+n} &\geq \frac{1}{n+n} + \frac{2}{n+n} + \cdots + \frac{n}{n+n} \\
&= \frac{1}{2n}(1 + 2 + \cdots + n) \\
&= \frac{1}{2n} \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n+1}{4}.
\end{aligned}$$

Lorsque $n \to \infty$, on voit que $\frac{n+1}{4} \to \infty$, donc par le théorème des deux gendarmes, on conclut que $\left(\frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+2} + \cdots + \frac{n}{n+n}\right) \to \infty$.