Analyse 1

Examen final

Enseignant : Jonathan Godin — Mardi le 8 août 2023
Session : Été 2023

Aucun matériel permis. L'examen dure 2h50 (170 minutes). L'examen est sur un total de 45 points. **Justifiez toutes vos réponses.**

Question 1. (10pts) Déterminer la nature des séries suivantes (divergente, conditionnellement convergente, absolument convergente).

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{3^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{a_n}}$, où $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converge

Question 2. a) (4pts) Calculer le maximum global et le minimum global de $y = \frac{2x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.

b) (4pts) Montrer que $|\log(x^2+1) - \log(y^2+1)| \leq |x-y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

Question 3. (8pts) Soit $a < b$ et $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ et que $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \infty$. Montrer que f est surjective, c'est-à-dire que pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe $x \in (a,b)$ tel que $f(x) = y$.

Question 4. (6pts) On suppose que $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, avec $x_0 < x_1$, sont deux solutions de l'équation $e^x \sin x = 1$, c'est-à-dire que

$$e^{x_0}\sin(x_0) = 1 \qquad \text{et} \qquad e^{x_1}\sin(x_1) = 1.$$

Montrer qu'il existe au moins une solution $y \in (x_0, x_1)$ à l'équation $e^x \cos x = -1$.
Indice. Considérez la fonction $f(x) = e^{-x} - \sin x$.

Question 5. (13pts) Soit $f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ une fonction positive et quatre fois dérivable. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$.

a) (3pts) Quelle(s) valeur(s) peut prendre $f'(x_0)$? Justifier*.

b) (6pts) On pose $g(x) = \sqrt{f(x)}$. On suppose que $f(x_0) = 0$, $f'(x_0) = 0$ et que $f''(x_0) \geq 0$. Montrer que g est dérivable en x_0 si et seulement si $f''(x_0) = 0$.

c) (4pts) On suppose de plus que $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) = 0$ et $f^{(4)}(x_0) > 0$. Montrer que g' est continue en x_0.

---

* Personnifiez Hercule Poirot : appliquez-vous avec ordre et méthode.