Analyse 1

Examen final (solutionnaire partiel)

Enseignant : Jonathan Godin Mardi le 8 août 2023
Session : Été 2023

Aucun matériel permis. L'examen dure 2h50 (170 minutes). L'examen est sur un total de 45 points. **Justifiez toutes vos réponses.**

Question 1. (10pts) Déterminer la nature des séries suivantes (divergente, conditionnellement convergente, absolument convergente).

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{3^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{a_n}}$, où $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

Solution. a) La série converge absolument. On a $2^n = (1+1)^n \geq 1 + n + \binom{n}{2} = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} \geq \frac{n^2}{4}$. Ainsi, par le critère de comparaison, puisque $\sum \frac{2^n}{3^n}$ converge (série géométrique), alors $\frac{1}{4}\sum \frac{n^2}{3^n}$ converge aussi, d'où la série de départ converge absolument.

On peut également utiliser le critère de d'Alembert.

b) La série diverge. Puisque $\sum a_n$ converge, il suit que $a_n \to 0$. Puisque $\frac{1}{2^{a_n}} \to \frac{1}{2^0} = 1 \neq 0$, par la condition nécessaire, il suit que la série diverge.

Question 2. a) (4pts) Calculer le maximum global et le minimum global de $y = \frac{2x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.

b) (4pts) Montrer que $|\log(x^2+1) - \log(y^2+1)| \leq |x - y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

Solution. a) D'abord, on remarque que la fonction est impaire, donc il suffit de l'analyser sur $[0, \infty)$. Pour la dérivée, on a

$$y' = \frac{2(x^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}\begin{cases} > 0, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ = 0, & \text{si } x = 1, \\ < 0, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

On voit qu'il y a un maximum global sur $[0, \infty]$ en $x = 1$. On a $y(1) = 1$ comme maximum. Pour $x < 0$, on a $y(x) < 0$, donc 1 est un maximum global sur $\mathbb{R}$. Puisque y est impaire et que $y(x) > 0$ pour $x > 0$, il suit que -1 est un minimum global et qu'il est atteint en $x = -1$.

b) On pose $f(x) = \log(x^2+1)$. Si on dérive, on trouve $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. Au a), on a trouvé que $\min_{\mathbb{R}} f'(x) = -1$ et $\max_{\mathbb{R}} f'(x) = 1$, donc il suit que $\sup_{\mathbb{R}} |f'(x)| = \max_{\mathbb{R}} |f'(x)| = 1$. Soit $x < y$ quelconques. Par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in (x, y)$ tel que

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y| \leq 1|x - y| = |x - y|.$$

Question 3. (8pts) Soit $a < b$ et $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ et que $\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$. Montrer que f est surjective, c'est-à-dire que pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe $x \in (a,b)$ tel que $f(x) = y$.

Solution. Soit $y \in \mathbb{R}$. Puisque $f(x) \to \infty$ lorsque $x \to b^-$, il existe $\delta_1 > 0$ tel que si $0 < b - x < \delta_1$, alors on a $f(x) > y$. On pose $x_1 = b - \frac{\delta_1}{2}$. De la même façon, puisque $f(x) \to -\infty$ lorsque $x \to a^+$, il existe $\delta_2 > 0$ tel que si $0 < x - a < \delta_1$, alors $f(x) < y$. On pose $x_2 = a + \frac{\delta_2}{2}$.

On a donc $f(x_2) < y < f(x_1)$. Puisque f est continue sur $[x_2, x_1]$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in (x_2, x_1)$ tel que $f(c) = y$.

Question 4. (6pts) On suppose que $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, avec $x_0 < x_1$, sont deux solutions de l'équation $e^x \sin x = 1$, c'est-à-dire que

$$e^{x_0}\sin(x_0) = 1 \qquad \text{et} \qquad e^{x_1}\sin(x_1) = 1.$$

Montrer qu'il existe au moins une solution $y \in (x_0, x_1)$ à l'équation $e^x \cos x = -1$.
Indice. Considérez la fonction $f(x) = e^{-x} - \sin x$.

Solution. On pose $f(x) = e^{-x} - \sin x$. Puisque $e^{x_j}\sin(x_j) = 1$, $j = 1, 2$, on a que $\sin(x_j) = e^{-x_j}$, donc $f(x_j) = 0$. Par le théorème de Rolle, il existe $c \in (x_1, x_2)$ tel que $f'(c) = 0$, c'est-à-dire $-e^{-c} - \cos c = 0$, d'où $e^c \cos c = -1$.

Question 5. (13pts) Soit $f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ une fonction positive et quatre fois dérivable. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$.

a) (3pts) Quelle(s) valeur(s) peut prendre $f'(x_0)$? Justifier*.

b) (6pts) On pose $g(x) = \sqrt{f(x)}$. On suppose que $f(x_0) = 0$, $f'(x_0) = 0$ et que $f''(x_0) \geq 0$. Montrer que g est dérivable en x_0 si et seulement si $f''(x_0) = 0$.

c) (4pts) On suppose de plus que $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) = 0$ et $f^{(4)}(x_0) > 0$. Montrer que g' est continue en x_0.

Solution. a) La seule valeur que $f'(x_0)$ peut prendre est 0, car x_0 est un minimum de f. En effet, on a $f(x) \geq 0 = f(x_0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Le développement limité de f en x_0 à l'ordre 2 est

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0)\tfrac{h^2}{2} + \varepsilon(h)h^2 \\ &= f''(x_0)\tfrac{h^2}{2} + \varepsilon(h)h^2, \qquad \text{(car } f(x_0) = f'(x_0) = 0) \end{aligned}$$

* Personnifiez Hercule Poirot : appliquez-vous avec ordre et méthode.

où $\varepsilon(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$. Si on remplace dans g, on trouve

$$g(x_0+h) = \sqrt{\frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \varepsilon(h)h^2} = |h|\sqrt{\frac{1}{2}f''(x_0) + \varepsilon(h)}.$$

On remarque $g(x_0) = \sqrt{f(x_0)} = 0$. Lorsque l'on calcule la limite de la dérivée, on a

$$g'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = \frac{|h|}{h}\sqrt{\tfrac{1}{2}f''(x_0) + \varepsilon(h)}.$$

Cette limite existe si et seulement si $f''(x_0) = 0$. En effet, si $f''(x_0) \neq 0$, alors $\frac{|h|}{h}$ diverge lorsque $h \to 0$. Réciproquement, si $f''(x_0) = 0$, alors $\frac{|h|}{h}$ est borné par 1 et $\sqrt{\varepsilon(h)} \to 0$. Dans ce cas, la limite converge vers 0.

c) Le développement limité à l'ordre 4 de f est $f(x_0+h) = f^{(4)}(x_0)\frac{h^4}{4!} + \varepsilon_1(h)h^4$, où $\varepsilon_1(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que si $|h| < \delta$, alors $\varepsilon(h) < f^{(4)}(x_0)$. Ainsi, pour $0 < |h| < \delta$, on a $f(x_0+h) > 0$. Autrement dit, g est dérivable en $x_0 + h$ pour $0 < |h| < \delta$. On a alors, pour $0 < |h| < \delta$,

$$g'(x_0+h) = \frac{f'(x_0+h)}{2\sqrt{f(x_0+h)}}. \tag{$*$}$$

On veut montrer que $g'(x_0+h) \to g'(x_0) = 0$ lorsque $h \to 0$.

Comme f' est trois fois dérivable en x_0, elle y possède un développement limité : $f'(x_0+h) = f^{(4)}(x_0)\frac{h^3}{3!} + \varepsilon_2(h)h^3$, où $\varepsilon_2(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$. En remplaçant dans $(*)$, on trouve

$$\begin{aligned} g'(x_0+h) &= \frac{f^{(4)}\frac{h^3}{3!} + \varepsilon_2(h)h^3}{\sqrt{f^{(4)}(x_0)\frac{h^4}{4!} + \varepsilon_1(h)h^4}} \\ &= \frac{h^3}{h^2}\frac{\frac{1}{3!}f^{(4)} + \varepsilon_2(h)}{\sqrt{\frac{1}{4!}f^{(4)}(x_0) + \varepsilon_2(h)}} \\ &\longrightarrow 0, \qquad \text{lorsque } h \to 0. \end{aligned}$$