Analyse 1

Examen final

Enseignant : Jonathan Godin — Mercredi le 10 août 2022

Session : Été 2022

Aucun matériel permis. L'examen dure 2h50 (170 minutes). Il y a un total de 55 points, votre note sera le nombre de points obtenus sur 50, maximum de 50/50. (Autrement dit, il y a 5 points supplémentaires.) **Justifiez toutes vos réponses.**

Question 1. (8pts) Vrai ou faux. Si l'énoncé est vrai, le montrer. S'il est faux, changer *un seul* mot pour qu'il devienne vrai et montrer le nouvel énoncé. (Vous ne pouvez pas changer un symbole mathématique, seulement un mot.)

A. Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente. Si (b_n) est une suite bornée, alors $\sum a_n b_n$ est absolument convergente.

B. Si f est une fonction qui vérifie $|f(x)| \leq |x|$ pour tout x, alors f est dérivable en zéro.

Question 2. (10pts) Soit $f\colon [0,1) \to [0,\infty)$ une fonction continue et à valeurs positives. Montrer que si $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$, alors f atteint son maximum sur $[0,1)$.

Question 3. (10pts) Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit p, q deux nombres strictements positifs. Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $pf(0) + qf(1) = (p+q)f(c)$.

Indice. Que pouvez-vous dire du nombre $z = \frac{p}{p+q}f(0) + \frac{q}{p+q}f(1)$?

Question 4. (4pts) Calculer la limite suivante

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x \log x)}{x}.$$

Question 5. (9pts) Déterminer la nature des séries suivantes (divergente, conditionnellement convergente, absolument convergente).

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{\log(e^n - 1)}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{3n}}{3^{2n}}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log\left(n^n\right)}{n!}$

Suite au verso

Question 6. (14pts) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On suppose que f et f'' sont bornées et on pose $M_0 := \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ et $M_2 := \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h > 0$, on a

$$|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$

Indice. Utilisez le théorème de Taylor.

b) On pose $g(h) = \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$. Tracer le graphe de g sur $(0, \infty)$. (Rappel : $M_0, M_2 \geq 0$.)

c) On pose $M_1 := \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|$. Déduire que

$$M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}.$$