Analyse 1

Série 5

Dérivée (solutionnaire)

1. Définition

Exercice 1. Calculer $f'(0)$, où $f(x) := x|x|$. Est-ce que $f''(0)$ existe?

Solution. La limite à gauche donne

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{-h^2 - 0}{h} = 0.$$

La limite à droite donne

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{h^2 - 0}{h} = 0.$$

On conclut que $f'(0) = 0$.

Pour $x \neq 0$, on trouve

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x > 0, \\ -2x, & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire que $f'(x) = 2|x|$. Or, cette fonction n'est pas dérivable en 0.

Exercice 2. Soit f une fonction dérivable et $c \in \mathbb{R}$ une constante.

a) Montrer à l'aide de la définition que si $g(x) = f(x) + c$, alors $g'(x) = f'(x)$. Expliquer ce que cela veut dire géométriquement.

b) Montrer à l'aide de la définition que si $h(x) = f(cx)$, alors $h'(x) = cf'(cx)$.

Solution. b) On a

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{k\to 0} \frac{h(x+k) - h(x)}{k} \\ &= \lim_{k\to 0} \frac{f(cx+ck) - f(cx)}{k} \\ &= c \lim_{k\to 0} \frac{f(cx+ck) - f(cx)}{ck} \\ &= cf'(cx). \end{aligned}$$

Exercice 3. Soit f une fonction.

a) Montrer que s'il existe une fonction g continue en 0 telle que $f(x) = xg(x)$, alors $f(0) = 0$ et f est dérivable en 0.

b)[†] Montrer que si $f(x) = 0$ et si $f'(0)$ existe, alors il existe une fonction g continue en 0 telle que $f(x) = xg(x)$.

Solution. a) On a $f(0) = 0\,g(0) = 0$. Ensuite, on a

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{hg(h)}{h} = g(h).$$

Lorsque $h \to 0$, $g(h) \to g(0)$, donc $f'(0)$ existe et vaut $g(0)$.

b) On pose

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ f'(0), & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On a donc que $f(x) = xg(x)$ par définition de g. Ensuite, pour voir que g est continue, on a

$$\lim_{h \to 0} g(h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0) = g(0).$$

D'où g est continue en 0.

Exercice 4. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ et soit $a \in I$. Montrer que s'il existe un reste r et un nombre $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(a+h) = f(a) + ch + r(h)h,$$

où $r(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = c$.

Exercice 5. Soit $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I$, alors a-t-on que $f'(x) \leq g'(x)$ pour tout $x \in I$?

Solution. Non. Par exemple, en prenant $I = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, $f(x) = x^3$ et $g(x) = x^2$, alors on a que $f(x) \leq g(x)$ sur I, mais $f'(x) \geq g'(x)$ sur I. En effet, il est clair que $x^3 \leq x^2$ sur I et on a

$$3x^2 \geq 2x \iff x \geq \frac{2}{3}$$

et cette dernière inégalité est vraie, puisque $x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$.

Exercice 6. Soit I un intervalle ouvert et $a \in I$. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction. On pose

$$L = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}.$$

a) Montrer que si f est dérivable en a, alors la limite L existe et $f'(a) = L$.

b) Réciproquement, si la limite L existe, alors f est-elle dérivable en a?

Solution. a) On a

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} &= \frac{f(a+h)-f(a)+f(a)-f(a-h)}{2h} \\ &= \frac{f(a+h)-f(a)}{2h} + \frac{f(a-h)-f(a)}{-2h} \\ &\to \tfrac{f'(a)}{2} + \tfrac{f'(a)}{2} = f'(a).\end{aligned}$$

b) Non, il suffit de prendre $f(x) = |x|$. On sait que f n'est pas dérivable en 0, mais on a

$$\frac{|h| - |-h|}{2h} = 0 \to 0$$

lorsque $h \to 0$.

Exercice 7. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Montrer que $f'(0)$ existe.

Exercice 8. Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $a \in I$ un point. Soit $f, g, h\colon I \to \mathbb{R}$ trois fonctions telles que $f(a) = g(a) = h(a)$ et $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ pour tout $x \in I$. Montrer que si f et h sont dérivables en a et que $f'(a) = h'(a)$, alors g est dérivable en a et $g'(a) = f'(a) = h'(a)$.

Exercice 9. Soit $f(x) = \exp(x)$.

a) Montrer que

$$1 + x \leq \exp(x) \leq 1 + x + \frac{x^2}{(2 - |x|)}.$$

b) Montrer que $\exp'(0) = 1$.

c) Montrer que $\exp'(x) = \exp(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Solution. a) Pour la majoration, on a

$$\begin{aligned}\exp(x) &= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &\leq 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|x|^n}{2^{n-1}} \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{2^n} \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} \frac{1}{1 - \frac{|x|}{2}} \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2 - |x|}.
\end{aligned}
$$

Pour la minoration, on utilise le fait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$
\frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} > 0 \iff (2k+1) > x,
$$

où cette dernière inégalité est vraie pour $x \in (-1, 1)$. Ensuite, on a

$$
\begin{aligned}
\exp(x) &= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\
&= 1 + x + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \\
&\leq 1 + x.
\end{aligned}
$$

b) Par le a), on a

$$
x \leq \exp(x) - 1 \leq x + \frac{x^2}{(2 - |x|)}. \tag{$*$}
$$

Si $x > 0$, l'équation $(*)$ devient

$$
1 \leq \frac{\exp(x) - 1}{x} \leq 1 + \frac{x}{(2 - x)}.
$$

En laissant $x \to 0^+$, on voit que $\frac{\exp(x)-1}{x} \to 1$.

Si $x < 0$, l'équation $(*)$ devient

$$
1 \geq \frac{\exp(x) - 1}{x} \geq 1 + \frac{x}{(2 + x)}.
$$

De même, on voit que $\frac{\exp(x)-1}{x} \to 1$ lorsque $x \to 0^-$. On conclut que $\exp'(0) = 1$.

c) On a

$$
\frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \frac{\exp(x)\exp(h) - \exp(x)}{h} = \exp(x)\frac{\exp(h) - 1}{h} \to \exp(x)\exp'(0),
$$

lorsque $h \to 0$. Comme $\exp'(0) = 1$, on conclut que $\exp'(x) = \exp(x)$.

2. Règles de calcul

Exercice 10. Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \cos(x + \log x)$

b) $f(x) = x\sin(x^2) - \log\left(\frac{x}{x-1}\right)$

c) $f(x) = x^x$

d) $f(x) = e^{x^2 \tan x}$

Exercice 11. Soit $f(x) = x^3$.

a) Calculer $f'(x)$.

b) Calculer $f'(x^2)$.

c) On pose $g(x) = f(x^2)$. Calculer $g'(x)$. A-t-on $g'(x) = f'(x^2)$?

Solution. a) $f'(x) = 3x^2$

b) $f'(x^2) = 3x^4$

c) $g'(x) = f'(x^2)2x = 6x^5 \neq 3x^4 = f'(x^2)$

Exercice 12. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Calculer la dérivée de f en fonction de g et de g'.

a) $f(x) = g\big(x + g(a)\big)$

b) $f(x) = \Big(xg\big(x+a\big)\Big)^2$

c) $f(x) = g\big(xg(x)\big)$

d) $f(x) = g(x)g\big(x^2 + g(x)\big)$

Solution. a) $f'(x) = g'\big(x + g(a)\big)$

b) $f'(x) = 2xg(x+a)\Big(g(x+a) + xg'(x+a)\Big)$

c) $f'(x) = g'\big(xg(x)\big)\Big(g(x) + xg'(x)\Big)$

d) $f'(x) = g'(x)g\big(x^2 + g(x)\big) + g(x)g'\big(x^2 + g(x)\big)\Big(2x + g'(x)\Big)$

Exercice 13. Soit $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

a) Montrer que f est continue en 0.

b) Montrer que f est dérivable en 0.

c) Montrer que f' est continue en 0.

Exercice 14. a) Démontrer la formule de Leibniz :

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(u \cdot v) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)} \cdot v^{(k)},$$

où u et v sont des fonctions n-fois dérivable. Ici, $u \cdot v$ représente le produit de u et de v.

b) Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Indice. Appliquez la formule du a) aux fonctions $u(x) = v(x) = x^n$.

Exercice 15. En utilisant l'identité

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x},$$

trouver une formule pour exprimer

$$\sum_{k=0}^{n} kx^{k-1}.$$

3. Extrémums

Exercice 16. Calculer le maximum et le minimum des fonctions suivantes.

a) $f(x) = x^2 - x$ sur $[0, 1]$

b) $f(x) = (x-2)\sqrt[3]{x^2}$ sur $[-3, 3]$

c) $f(x) = xe^x$ sur $[-2, 1]$

d) $f(x) = \begin{cases} x \log x, & \text{si } x \in (0, 1], \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Solution. b) On trouve d'abord les points critiques de f et les points où f' n'existe pas. On a

$$f'(x) = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x-2)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{3x + 2x - 4}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5x - 4}{3\sqrt[3]{x}}.$$

On coit que f n'est pas dérivable en 0 et que $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = \frac{4}{5}$. Les candidats sont donc

$$x_1 = -3, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{4}{5}, \quad x_4 = 3.$$

En évaluant, on trouve

$$f(x_1) = -5\sqrt[3]{9}, \quad f(x_2) = 0, \quad f(x_3) = -\tfrac{6}{5}\sqrt[3]{\tfrac{16}{25}}, \quad f(x_4) = \sqrt[3]{9}.$$

Il est clair que le maximum est atteint en x_4. Pour le minimum, on a

$$-5\sqrt[3]{9} < -\tfrac{6}{5}\sqrt[3]{\tfrac{16}{25}} \iff 125 \times 9 > \tfrac{216}{125} \times \tfrac{16}{25} \iff 125 > \tfrac{24}{125} \times \tfrac{16}{25}$$

et la dernière inégalité est vraie puisque $\frac{24}{125} < 1$ et $\frac{16}{25} < 1$. Ainsi, le minimum global est atteint en x_1.

Exercice 17. Déterminer si $5^{\sqrt{6}}$ est plus grand ou plus petit que $6^{\sqrt{5}}$.
Suggestion. Comparez $f(5)$ et $f(6)$, où $f(x) = \frac{\log x}{\sqrt{x}}$.

Exercice 18. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On pose $g(x) := f \circ f(x)$. Quels sont les points critiques de g?
Rappel. On dit que x est un point critique de g si $g'(x) = 0$.

Solution. Par la règle de dérivation en chaîne, on a $g'(x) = f'\big(f(x)\big)f'(x)$. Ainsi, on a $g'(x) = 0$ si et seulement si $f'(x) = 0$ ou $f'\big(f(x)\big) = 0$.

Soit E l'ensemble des points critiques de f et F l'ensemble des points critiques de g. Si $x \in F$, alors $f'(x) = 0$ ou $f'\big(f(x)\big) = 0$. Dans le premier cas, on a $x \in E$. Dans le second cas, on a $f(x) \in E$. Or, on sait que $f(x) \in E$ si et seulement si $x \in f^{-1}(E)$.

Conclusion : $F = E \cup f^{-1}(E)$.

Exercice 19. Soit $a < c < b$. Soit $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables telles que $f(c) = g(c)$ et $f'(x) > g'(x)$ pour tout $x \in [a,b]$.

a) Montrer que $f(x) > g(x)$ pour tout $x \in (c,b]$.

b) Montrer que $f(x) < g(x)$ pour tout $x \in [a,c)$.

Solution. On pose $h(x) = f(x) - g(x)$. Par hypothèse, on a que $h(c) = 0$ et $h'(x) > 0$ pour tout $x \in [a,b]$.

a) Puisque h est strictement croissante, on a $h(0) < h(x)$ pour tout $x \in (c,b]$.

b) Puisuique h et strictement croissante, on a $h(x) < h(0)$ pour tout $x \in [a,c)$.

4. Théorème de Rolle et des accroissements finis

Exercice 20. Soit I un intervalle et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.

a) Montrer que f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.

b) Montrer que si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement croissante sur I.

Exercice 21. Soit $f(x) = 1 - (1-x)^{\frac{2}{3}}$, pour $x \in [0,2]$. Existe-t-il un $y \in (0,2)$ tel que $f'(y) = 0$? Cela contredit-il le théorème de Rolle?

Solution. Calculons f'. On a

$$f'(x) = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}.$$

On voit que $f'(x) \neq 0$ pour tout x où f' est définie. Ainsi, il est impossible qu'il existe x tel que $f'(x) = 0$, même si $f(0) = f(2) = 0$. Cela ne contredit pas le théorème de Rolle, puisque f n'est pas dérivable en 1.

Exercice 22. Soit $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $f'(x) \geq M$ pour tout $x \in [a, b]$. Montrer que $f(b) \geq f(a) + M(b - a)$.

Remarque. On sait déjà que $f(b) \geq f(a)$, car l'hypothèse implique que f est croissante. Ainsi, cet exercice donne une inégalité un peu plus fine.

Exercice 23. Montrer les inégalités suivantes.

a) $\sin x \leq x \quad (x \geq 0)$ b) $1 + x \leq e^x \quad (x \in \mathbb{R})$ c) $\sqrt{1+x} \leq 1+\frac{1}{2}x \quad (x > -1)$

Solution. a) Si on applique le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[0, x]$, il existe $0 < \xi < x$ tel que

$$(\sin x - \sin 0) = \cos\xi(x - 0) \leq x,$$

car $\cos\xi \leq 1$ quelque soit ξ. Comme $\sin 0 = 0$, on obtient l'inégalité voulue.

b) On applique le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[0, x]$, il existe $0 < \xi < x$ tel que

$$e^x - e^0 = e^\xi(x - 0) \geq x,$$

car $\xi > 0$. Puisque $e^0 = 1$, il suit que $e^x \geq 1 + x$.

Ensuite, si on applique une nouvelle fois le théorème des accroissements finis, mais cette fois sur $[x, 0]$, alors il existe $x < \xi < 0$ tel que

$$e^x - e^0 = e^\xi(x - 0) \geq x,$$

car $x \leq 0$ et $0 < e^\xi < 1$.

c) On pose $g(x) = \sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x$. On a

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2}\begin{cases} > 0, & \text{si } -1 < x < 0, \\ = 0, & \text{si } x = 0, \\ < 0, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Ainsi, le point $x = 0$ est un maximum gobal de g. On a donc $g(0) = 0 \geq g(x)$, d'où $1 + \frac{1}{x} \geq \sqrt{1+x}$.

Exercice 24. Trouver le nombre exact de zéro du polynôme $p(x) = x^4 - 8x^3 - 21x^2 + 22x - 2$.

Indice. Tous les zéros se trouvent dans $(-3, 11)$.

Exercice 25. Soit $a < c < b$. Soit $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $f'(x)$ existe en tout point $x \neq c$. Montrer que si $\lim_{x\to c} f'(x)$ existe, alors f est dérivable en c.

Solution. On pose $L = \lim_{x \to c} f'(x)$. Soit $h > 0$. Par le théorème des accroissements finis, on a
$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = f'\big(\xi(h)\big),$$
où pour chaque h, $\xi(h)$ est un nombre dans $(c, c+h)$. Ainsi, lorsque $h \to 0$, il suit que $\xi(h) \to c$. On a donc
$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = f'\big(\xi(h)\big) \to L \qquad \text{lorsque } h \to 0$$
et la limite à droite existe. Le cas où $h < 0$ est analogue. On conclut que $f'(c)$ existe et vaut L.

Exercice 26. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que si f' est continue, alors il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x, y \in [a,b]$, on a $|f(x) - f(y)| \le M|x-y|$.

Solution. Puisque f' est continue sur un intervalle compact, f' est bornée, disons par M. Par le théorème des accroissements finis, appliqué sur $[x,y] \subseteq [a,b]$, il existe $x < \xi < y$ tel que
$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x-y| \le M|x-y|.$$

Exercice 27. Soit la suite (a_n) définie par $a_1 = -\frac{1}{8}$ et $a_{n+1} = a_n^3 + a_n^2$ pour $n \ge 1$. Soit $f(x) = x^3 + x^2$.

a) Montrer que $|a_n| \le \frac{1}{4}$.

b) Montrer que $|f'(x)| \le \frac{11}{16}$ pour tout $x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$.

c) À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que (a_n) est Cauchy.

Exercice 28†. Soit $f\colon [a,b] \to [a,b]$ une fonction dérivable. On suppose qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = x_0$. On suppose de plus que f' est continue en x_0.

a) Montrer que si $|f'(x_0)| < 1$, alors il existe $k > 0$ et $\delta > 0$ tels que pour tout $x \in [a,b]$, si $|x - x_0| < \delta$, alors $|f'(x)| \le k < 1$.

b) Montrer que si $|x - x_0| < \delta$, alors $|f(x) - x_0| < \delta$.

c) Soit $c \in [a,b]$. On définit la suite (a_n) par $a_1 = c$ et $a_{n+1} = f(a_n)$ pour $n \ge 1$. Montrer que si $|c - x_0| < \delta$, alors (a_n) est une suite de Cauchy.

d) Montrer que (a_n) converge vers x_0.

Solution. a) Puisque $|f'(x_0)| < 1$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|f'(x_0)| + \varepsilon < 1$. On pose $k = |f'(x_0)| + \varepsilon$. Puisque f' est continue en x_0, il existe $\delta > 0$ tel que si $|x - x_0| < \delta$, alors $|f'(x) - f'(x_0)| < \varepsilon$. On a donc
$$f'(x_0) - \varepsilon < f'(x) < f'(x_0) + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad -|f'(x_0)| - \varepsilon < f'(x) < |f'(x_0)| + \varepsilon,$$
d'où $|f'(x)| \le k < 1$.

b) On suppose que $|x - x_0| < \delta$. Par le théorème des accroissements finis, il existe ξ dans (x, x_0) ou dans (x_0, x) tel que

$$|f(x) - f(x_0)| = |f'(\xi)||x - x_0|.$$

En particulier, on a $|\xi - x_0| \leq |x - x_0| < \delta$, donc on obtient

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f'(\xi)||x - x_0| \\ &\leq k|x - x_0| \\ &< k\delta \\ &< \delta. \end{aligned}$$

c) Puisque $|c - x_0| < \delta$, on a que $|f(c) - x_0| < \delta$, c'est-à-dire $|a_2 - x_0| < \delta$, par définition de a_2. Par récurrence, si $|a_n - x_0| < \delta$, alors $|f(a_n) - x_0| < \delta$ et donc $|a_{n+1} - x_0| < \delta$. On conclut que $a_n \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ensuite, par le théorème des accroissaments finis, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $\xi_n \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tel que

$$|f(a_{n+1}) - f(a_n)| = |f'(\xi_n)||a_{n+1} - a_n| \leq k|a_{n+1} - a_n|.$$

Autrement dit, on a $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq k|a_{n+1} - a_n|$. Par l'exercice 36 de la série 2, on conclut que (a_n) est Cauchy, puisque $0 \leq k < 1$.

d) Soit L la limite de (a_n). Puisque f est continue, on a que

$$a_{n+1} = f(a_n) \quad \Rightarrow \quad L = f(L).$$

Ainsi, la limite de (a_n) est un point fixe de f dans l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

On suppose que y_0 est un autre point fixe de f dans cet intervalle. Par le théorème des accroissements finis, il existe ξ dans (x_0, y_0) ou dans (y_0, x_0) tel que

$$|x_0 - y_0| = |f(x_0) - f(y_0)| = |f'(\xi)||x_0 - y_0| \leq k|x_0 - y_0|.$$

Or, $k < 1$, donc la seule façon que cette inégalité peut être vérifiée est si $x_0 = y_0$. Ainsi, puisque x_0 est l'unique point fixe dans l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, on a $L = x_0$.

5. Règle de l'Hôpital

Exercice 29. Calculer les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin(5x)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{\sin(5x)} - \frac{1}{5}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (x + 2^x)^{\frac{1}{x}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{b^x - 1}$, $(a, b > 0)$

e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (\arctan(x+1) - \arctan x)$

f) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{x} \log\left(1 + \tfrac{1}{x}\right)$

Solution. a) C'est une forme indéterminée $0/0$. La règle de l'Hôpital donne

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin(5x)} \overset{\text{R.H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{5\cos(5x)} = \frac{1}{5}.$$

b) Par le a), la première partie de la somme converge vers $\frac{1}{5}$. Il suit que la limite existe et vaut 0.

c) C'est une forme indéterminée ∞^0. Calculons d'abord le logarithme de la limite. On a

$$\lim_{x\to\infty} \log\left((x+2^x)^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\log(x+2^x)}{x} \overset{\text{R.H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1+2^x\log 2}{x+2^x}}{1} = \log 2.$$

Ensuite, on prend l'exponentielle et on conclut que la limite de départ tend vers 2.

Cette limite se calcule aussi sans la règle de l'Hôpital. On a $(x+2^x)^{\frac{1}{x}} = 2\left(\frac{x}{2^x}+1\right)^{\frac{1}{x}}$. Ensuite, on minore et on majore comme suit :

$$2 \leq 2\left(\tfrac{x}{2^x}+1\right)^{\frac{1}{x}} \leq 2\left(\tfrac{x}{x}+1\right)^{\frac{1}{x}} = 2\times 2^{\frac{1}{x}}.$$

Lorsque $x\to\infty$, on voit que $2^{\frac{1}{x}} \to 0$, donc par le théorème des deux gendarmes, on conclut que $(x+2^x)^{\frac{1}{x}} \to 2$.

Exercice 30. On calcule une limite de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{x-1} &\overset{\text{R.H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x}{1} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Quelle est l'erreur? Calculer la limite de la bonne façon.

Solution. Ce n'est pas une forme indéterminée, donc on ne peut pas appliquer la règle de l'Hôpital. On calcule la limite directement, puisque la fonction est continue en 0 :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{x-1} = 1.$$

Exercice 31. On calcule une limite de la façon suivante :

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right) \overset{\text{R.H}}{=} \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right) = 0.$$

Quelle est l'erreur? Calculer la limite de la bonne façon.

Solution. On ne peut pas appliquer directement la règle de l'Hôpital sur la forme indéterminée $\infty-\infty$. Il faut d'abord la transformer en une forme $0/0$ ou ∞/∞ ou bien calculer la limite sans la règle de l'Hôpital. Ici, on multiplie par le conjugué :

$$\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right) = \frac{x+1-(x-1)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}.$$

On voit maintenant que la limite est 0 lorsque $x\to\infty$.

Exercice 32. On calcule une limite de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{\sin x} &= \frac{e^0-1}{\sin 0} = \frac{0}{0} \qquad \text{(forme indéterminée)}\\ &\overset{\text{R.H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}}{\cos x}\\ &= \frac{1}{1} = 1.\end{aligned}$$

Quelle est l'erreur? Calculer la limite de la bonne façon.

Solution. Le numérateur a mal été dérivé. On a en fait

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{\sin x} &= \frac{e^0-1}{\sin 0} = \frac{0}{0} \qquad \text{(forme indéterminée)}\\ &\overset{\text{R.H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}}{\cos x}\\ &= \frac{0}{1} = 0.\end{aligned}$$

Exercice 33. Tenter de résoudre la limite en utilisant la règle de l'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+3}}{x+3}.$$

Quelle est le problème? Résoudre par une autre méthode.

Exercice 34[†]. Calculer la limite

$$\lim_{x\to\infty} x\frac{x^{\frac{1}{x}}-1}{\log x}.$$

Solution. D'abord, on note que $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\log x}$ et donc sa dérivée est

$$\left(x^{\frac{1}{x}}\right)' = e^{\frac{1}{x}\log x}\left(-\frac{1}{x^2}\log x + \frac{1}{x^2}\right).$$

On a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x\frac{x^{\frac{1}{x}}-1}{\log x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}\log x} = \frac{0}{0} \qquad \text{(forme ind.)}\\ &\overset{\text{R.H.}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}\log x}\left(-\frac{1}{x^2}\log x+\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}\log x+\frac{1}{x^2}}\\ &= \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.\end{aligned}$$

6. Développements limités et Théorème de Taylor

Exercice 35. Soit $f\colon(-1,1)\to\mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable en 0 telle que $f(0)=0$. On pose

$$g(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, & \text{si } x\neq 0,\\ f'(0), & \text{si } x = 0.\end{cases}$$

Calculer $g'(0)$.

Solution. On a

$$g'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(h)}{h}-f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f'(0)h}{h^2}. \qquad (*)$$

Le développement limité de f en 0 donne $f(h)=f'(0)h+\frac{1}{2}f''(0)h^2+r(h)h^2$, où $r(h)\to 0$ lorsque $h\to 0$. On remplace dans $(*)$ pour obtenir :

$$g'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f'(0)h+\frac{1}{2}f''(0)h^2+r(h)h^2-f'(0)h}{h^2} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2}f''(0)h^2+r(h)h^2}{h^2} = \frac{1}{2}f''(0).$$

Attention! On ne peut pas utiliser la règle de l'Hôpital dans ce problème. Voyez-vous pourquoi? (Indice : lisez bien les hypothèses sur f.)

Exercice 36. Soit f une fonction trois fois dérivable en 0 telle que

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sin x - x} = 1.$$

Déterminer son développement limité jusqu'à l'ordre trois.

Exercice 37. Montrer que pour $x\in(0,\frac{\pi}{2})$, on a $\tan x > x+\frac{x^3}{3}$.

Solution. On applique le théorème de Taylor sur l'intervalle $[0,x]$. D'abord, calculons les quatre premières dérivées de tan. On a

$$\begin{aligned}
&\tan(0) = 0\\
&\tan'(0) = \sec^2(x)\big|_{x=0} = 1\\
&\tan''(0) = 2\sec^2(x)\tan(x)\big|_{x=0} = 0\\
&\tan'''(0) = 4\sec^2(x)\tan^2(x)+2\sec^4(x)\big|_{x=0} = 2\\
&\tan^{(4)}(x) = 8\sec^2(x)\tan^3(x)+8\sec^4(x)\tan(x)+8\sec^4(x)\tan(x).
\end{aligned}$$

Puisque $\tan(x)>0$ sur $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ et que les autres termes sont des puissances paires de sécante, on voit que $\tan^{(4)}(x)>0$ pour tout $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Par le théorème de Taylor, il existe $0 < \xi < x$ tel que

$$\tan x = x + \frac{2x^3}{3!} + \frac{1}{4!}\tan^{(4)}(\xi)x^4 > x + \frac{x^3}{3!} + 0.$$

Exercice 38. Montrer les inégalités suivantes en utilisant le théorème de Taylor.

a) $|\sin x - x| \leq \frac{x^2}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$ b) $|\log(1+x) - x| \leq \frac{x^2}{2} \quad (x \geq 1)$

Exercice 39†. a) Montrer que le développement de Taylor de $\log(1+x)$ en $x = 0$ est

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + \frac{(-1)^{n+1}}{(1+\xi)^n}\frac{x^n}{n},$$

où $\xi \in (-x, x)$.

b) Montrer que si $x \in [0,1]$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$x - \tfrac{x^2}{2} + \cdots - \tfrac{x^{2n}}{2n} \leq \log(1+x) \leq x - \tfrac{x^2}{2} + \cdots + \tfrac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

c) Déduire que $\log 2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Attention! Il est vrai qu'on a $\log(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ pour tout $x \in (-1,1)$, mais ce n'est pas une conséquence du théorème de Taylor. En général, le théorème de Taylor ne permet pas de faire un développement « jusqu'à l'infini ». Comparer avec l'exercice 40.

Exercice 40†. On pose $f(x) := e^{-\frac{1}{x}}$ si $x > 0$ et $f(x) := 0$ si $x \leq 0$.

a) Montrer que f est dérivable et calculer $f'(0)$.

b) Montrer qu'il existe deux polynômes P_n, Q_n tels que $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}e^{-\frac{1}{x}}$ pour $x > 0$.

c) Montrer que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) Selon le théorème de Taylor, on a

$$f(x) = f(0) + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + f^{(n+1)}(\xi)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

pour un certain $\xi \in (-x, x)$. Or, par le c), on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} = 0 \neq f(x) \quad \text{pour } x > 0.$$

Expliquer pourquoi cela ne contredit pas le théorème de Taylor.

Solution. a) On utilise la définition de la dérivée. La limite à gauche donne clairement 0. La limite à droite se calcule comme suit

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{h}}-0}{h} = \lim_{k\to\infty} ke^{-k} = 0,$$

où on a utilisé la substitution $k = \frac{1}{h}$.

b) On procède par récurrence. Pour $n = 0$, on prend $P_0(x) = 1$ et $Q_0(x) = 1$. Ensuite, on suppose que l'énoncé est vrai pour n et on le montre pour $n+1$. On a

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) &= \left(\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}e^{-\frac{1}{x}}\right)' \\ &= \frac{P_n'(x)}{Q_n(x)}e^{-\frac{1}{x}} - \frac{P_n(x)Q_n'(x)}{Q_n(x)^2}e^{-\frac{1}{x}} + \frac{P_n(x)}{x^2Q_n(x)}e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{\left(x^2P_n'(x)Q_n(x) - x^2P_n(x)Q_n'(x) + P_n(x)Q_n(x)\right)}{x^2Q_n(x)^2}e^{-\frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

Puisque P_n, Q_n', Q_n^2 et x^2 sont des polynômes, on peut prendre $P_{n+1}(x) = x^2P_n'(x)Q_n(x) - x^2P_n(x)Q_n'(x) + P_n(x)Q_n(x)$ et $Q_{n+1}(x) = x^2Q_n(x)^2$.

c) On utilise la définition de la dérivée. Il est clair que la limite à gauche vaut 0. Pour la limite à droite, on a

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{P_n(h)}{Q_n(h)}e^{-\frac{1}{h}}. \tag{$*$}$$

On sait que $P_n(h) \to P_n(0)$ lorsque $h \to 0^+$, donc on peut ignorer cette partie de la limite. Si $Q_n(h) \not\to 0$, alors on peut conclure que $(*)$ vaut 0. Si $Q_n(0) = 0$, alors il existe un polynôme $R_n(x)$ tel que $Q_n(x) = x^kR_n(x)$, avec $R_n(0) \neq 0$. Ainsi, il suffit de montrer que $\frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h^k} \to 0$ lorsque $h \to 0^+$. Pour ce faire, on a

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h^k} = \lim_{m\to\infty} m^ke^{-m} = \lim_{m\to\infty} \frac{m^k}{e^m}$$

et on trouve que cette dernière vaut 0 en appliquant la règle de l'Hôpital k fois.

d) Remarquons d'abord que $f^{(n)}$ est continue sur $\mathbb{R}$. En effet, il est clair qu'elle est continue sur $\mathbb{R}^{\{}0\}$. Ensuite, puisque $f^{(n+1)}(0)$ existe, il suit que $f^{(n)}$ est continue en 0. Ainsi, le théorème de Taylor s'applique bien.

Il n'y a pas de contradiction, car $f^{(n+1)}(\xi)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \not\to 0$ lorsque $n \to \infty$. Ainsi, même si la série de Taylor de f converge sur $\mathbb{R}$, elle ne peut pas converger vers f.

7. Autres

Exercice 41. Tracer le graphe des fonctions suivantes.

a) $f(x) = (x-1)e^x$

b) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x - 10$

c) $f(x) = \frac{x^2(x-2)}{x-1}$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{|1-x^2|}}{x}$

Exercice 42. Calculer la série de Taylor en $x = 0$ des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

b) $f(x) = \sqrt{1+x}$

c) $f(x) = e^{x^2}$

d) $f(x) = \log(1+x)$

e) $f(x) = \arctan x$

f) $f(x) = \sin(x^2)$

Exercice 43. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable non constante telle que $f(0) = 1$. Montrer que si $f'(x) = f(x)$ pour tout x, alors $f(x) = e^x$.
Indice. Le problème est équivalent à montrer que $\frac{f(x)}{e^x} = 1$.

Exercice 44. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable non constante telle que $f(0) = 1$. Montrer que si $f(x+y) = f(x)f(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, alors $f(x) = e^x$.

Exercice 45. Montrer que $f(x) = \log x$ est dérivable sur $(0, \infty)$ et que $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Solution. Puisque exp est l'inverse de log et que exp est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $\exp'(x) = \exp(x) \neq 0$ (voir l'exercice 9), par le théorème d'inversion locale, on a que log est dérivable pour tout $x \in (0, \infty)$ et

$$\log x = \frac{1}{\exp(\log x)} = \frac{1}{x}.$$