Analyse 1

Série 4

Continuité (solutionnaire)

1. Limites de fonctions

Exercice 1. Calculer les limites suivantes.

a) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$

b) $\lim_{x\to 3} \sqrt{x^2+7}$

c) $\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$

d) $\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$

f) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

g) $\lim_{x\to 0} f(x)$, où $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si } x \geq 0, \\ \dfrac{x+1}{2x^2+x-1}, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

h) $\lim_{x\to 1} f(x)$, où $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}, & \text{si } x \geq 1, \\ \sqrt{1-x}, & \text{si } x < 1 \end{cases}$

Solution. c) On a

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(1-\frac{1}{x})} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{(1-\frac{1}{x})} \\ &= \frac{\sqrt{1+0}}{1-0} = 1. \end{aligned}$$

d) On a

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} &= \lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{1}{1+\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{1+\sqrt{1}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

f) On a

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-1+x^2}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{(1+\sqrt{1-x^2})} \\
&= \frac{1}{(1+\sqrt{1-0})} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

g) On calcule les limites à droite et à gauche. Pour la limite à droite, on a

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x+1) = 1.$$

Pour la limite à gauche, on a

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x+1}{2x^2+x-1} = \frac{0+1}{0+0-1} = -1.$$

Ainsi, la limite n'existe pas.

Exercice 2. Montrer que la limite lorsque $x \to 1$ de $\left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right)$ tend vers -1.

Exercice 3. Déterminer le domaine de la fonction $f(x) := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{nx}$.

Solution. D'abord, il faut que $x \geq 0$, sinon $\sqrt[n]{x}$ n'est pas définie pour n pair. Si $x = 0$, alors il est clair que $f(0) = 0$. Ensuite, si $x > 0$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{nx} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{x} = 1.$$

Ainsi, le domaine de la fonction est $[0, \infty)$.

Exercice 4. Soit $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ deux fonctions et soit $a \in \overline{D}$.

a) Trouver un exemple pour lequel $\lim_{x\to a} \big(f(x) + g(x)\big)$ existe, mais $\lim_{x\to a} f(x)$ ou $\lim_{x\to a} g(x)$ n'existe pas.

b) Si $\lim_{x\to a} \big(f(x) + g(x)\big)$ et $\lim_{x\to a} \big(f(x) - g(x)\big)$ existent, peut-on conclure que $\lim_{x\to a} f(x)$ et $\lim_{x\to a} g(x)$ existent?

Exercice 5. Soit $D \subseteq \mathbb{R}$, $a \in D$ et $f\colon D \to \mathbb{R}$.

a) Montrer que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ si et seulement si $\lim_{x\to a} \Big(f(x) - L\Big) = 0$.

b) Montrer que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x+a)$.

c) On suppose que $a = 0 \in D$. Montrer que $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x^3)$.

Solution. b) On suppose que $\lim_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D$ tel que $|x-a| < \delta$, on a $|f(x) - L| < \varepsilon$. Or, si on pose $y = x - a$, alors $x = y + a$. En substituant, on trouve $|y| < \delta$ et $|f(y+a) - L| < \varepsilon$. Autrement dit, on a montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $y + a \in D$ et $|y| < \delta$, alors $|f(y+a) - a| < \varepsilon$, d'où $\lim_{y\to 0} f(y+a) = L$.

Le cas où $\lim_{x\to 0} f(x+a)$ converge se fait de la même façon. Les cas où l'une ou l'autre tend vers $\pm\infty$ sont semblables. Enfin, le cas où l'une ou l'autre diverge est aussi semblable.

Exercice 6. Calculer la limite de $\frac{\lfloor x\rfloor - x}{x}$ lorsque $x \to 0$, si elle existe.

2. Fonctions continues en un point

Exercice 7. a) Soit f une fonction qui est telle que $|f(x)| \leq |x|$ pour tout x. Montrer que f est continue en 0.

b) Soit g une fonction telle que $g(0) = 0$ et g est continue en 0. Montrer que si $|f(x)| \leq |g(x)|$, alors f est continue en 0.

Exercice 8. a) Montrer que $f(x) = \max\{0, x\}^2$ est continue en 0.

b) La fonction possède-t-elle des points de discontinuité?

Solution. a) On calcule les limites à droite et à gauche. D'abord, on a

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0.$$

Ensuite, on a

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0.$$

Ainsi, il suit que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Enfin, on a bien $f(0) = 0$, d'où f est continue en 0.

Exercice 9. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on ait $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Montrer que si f est continue en 0, alors f est continue en a pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Solution. Soit $a \in \mathbb{R}$. On voit que

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = \lim_{h\to 0} \big(f(a) + f(h)\big) = f(a) + f(0).$$

Ainsi, il suffit de montrer que $f(0) = 0$. Cela suit simplement du fait que $f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$. Comme $f(0) = 2f(0)$, on conclut que $f(0) = 0$.

Conclusion : on a $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$, d'où f est continue en a.

Exercice 10. Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Soit $a \in I$ un point et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue en a. Montrer que si $f(a) \neq 0$, alors il existe $r > 0$ tel que $(a-r, a+r) \subseteq I$ et $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in (a-r, a+r)$.

Exercice 11. Montrer que exp est continue en 0.

Solution. Par l'exercice 24 de la série 3, pour tout $|x| < 1$, on a

$$1 + x \leq \exp(x) \leq 1 + \frac{|x|}{1-|x|}.$$

Ainsi, par le théorème des deux gendarmes, lorsque $x \to 0$, on voit que $\exp(x) \to 1$. Comme $\exp(0) = 1$, on conclut que exp est continue en 0.

Exercice 12. Soit $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

a) Quel est le plus grand domaine de définition de f? Montrer que f est continue sur son domaine.

b) Existe-t-il un prolongement continue en 1?

Solution. b) Si la limite lorsque $x \to 1$ de $f(x)$ existe, alors il sera possible de prolonger f est une fonction continue en 1.

On a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\\ &= \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Le prolongement de f est une fonction $\tilde{f}$ définie par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\\ \frac{1}{2}, & \text{si } x = 1,\end{cases}$$

qui est continue en 1.

3. Fonctions continues sur un intervalle

Exercice 13. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,$$

alors f possède au moins un zéro.

Solution. Puisque $f(x) \to -\infty$ lorsque $x \to -\infty$, il existe $M < 0$ tel que si $x < M$, alors $f(x) < -1$. Puisque $f(x) \to \infty$ lorsque $x \to \infty$, il existe $N > 0$ tel que si $x > N$, alors $f(x) > 1$. Ainsi, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $y \in [M, N]$ tel que $f(y) = 0$.

Exercice 14. Soit $a < b < c$. Soit $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ et $h\colon [b, c] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On pose

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{si } x \in [a, b], \\ h(x), & \text{si } x \in (b, c]. \end{cases}$$

Sous quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on que f est continue?

Exercice 15. Montrer que les fonctions suivantes ont au moins un zéro. Donner une approximation de la racine à au plus $\frac{1}{2}$.

a) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 2$

b) $f(x) = e^x + \log x$

Solution. b) On voit que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$. Ainsi, il existe $\delta > 0$ tel que si $0 < x < \delta$, alors $f(x) < -1$. Ensuite, on voit que $f(1) = e > 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in (0, 1)$ tel que $f(x_0) = 0$. On peut prendre $\frac{1}{2}$ comme approximation, car $|x_0 - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$.

Exercice 16. Soit $f\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^2$. Calculer $\sup_{(-1,1)} f(x)$ et $\inf_{(-1,1)} f(x)$. Est-ce que f atteint son maximum? Son minimum? Cela contredit-il le théorème vu en classe sur le maximum et le minimum de f?

Solution. D'abord, on voit que $f(0) = 0$ et que $f(x) \geq 0$ pour tout x. Ensuite, pour (x_n) une suite de $(-1, 1)$ telle que $x_n \to 1$, on a que $f(x_n) \to 1$, car f est continue. Ainsi, pour tout $z \in [0, 1)$, il existe x_n tel que $0 \leq z < f(x_n)$ et par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe x tel que $f(x) = z$. On conclut que $f\big((-1, 1)\big) = [0, 1)$. Il suit que $\sup_{x\in(-1,1)} f(x) = \sup[0, 1) = 1$.

Puisque pour tout $f(x) < 1$ pour tout $x \in (-1, 1)$, on conclut que f n'a pas de maximum.

On voit que l'infimum est 0. Puisque $f(0) = 0$, f possède un minimum qui est atteint en $x = 0$.

Exercice 17. Soit $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue. Montrer que f possède un point

fixe, c'est-à-dire qu'il existe un x tel que $f(x) = x$.
Indice. Utilisez le théorème des valeurs intermédiaires.

Solution. Si $f(0) = 0$ ou $f(1) = 1$, alors f possède un point fixe. Ainsi, on suppose que $f(0) > 0$ et que $f(1) < 1$. On pose $g(x) = f(x) - x$. On a que $g(0) = f(0) > 0$ et que $g(1) = f(1) - 1 < 0$. Ainsi, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $z \in (0, 1)$ tel que $g(z) = 0$, c'est-à-dire que $f(z) - z = 0$ et donc que $f(z) = z$.

Exercice 18. Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $f, g \colon D \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Soit $E \subseteq D$ un sous-ensemble dense dans D. Montrer que si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in E$, alors $f = g$ sur D.

Solution. Soit $y \in D$. Puisque E est dense dans D, il existe une suite (x_n) dans E telle que $x_n \to y$ lorsque $n \to \infty$. Ainsi, on a $f(x_n) = g(x_n)$, car $x_n \in E$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque f et g sont continues, si on laisse $n \to \infty$, on obtient $f(y) = g(y)$. Comme y était arbitraire, on a bien $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in D$.

Exercice 19. Soit $f \colon D \to \mathbb{R}$. Soit $K \in (0, \infty)$ un nombre tel que pour tout $x, y \in D$, on ait

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Montrer que f est uniformément continue.

Solution. Soit $\varepsilon > 0$. Il suffit de prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$.

Exercice 20. Soit $I = (a, b)$ un intervalle. Soit $f \colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit c tel que $a < c < b$. Montrer que si f est uniformément continue sur $(a, c]$ et sur $[c, b)$, alors f est uniformément continue sur (a, b).

Solution. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $x, y \in (a, c]$, si $|x - y| < \delta_1$, alors $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. De même, il existe δ_2 tel que pour tout $x, y \in [c, b)$, si $|x - y| < \delta_2$, alors $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

On pose $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Soit $x, y \in (a, b)$ tels que $|x - y| < \delta$. Si $x, y \in (a, c]$ ou si $x, y \in [c, b)$, alors on a que $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, car $\delta \leq \delta_1$ et $\delta \leq \delta_2$.

Pour le dernier cas, on peut supposer sans perte de généralité que $x < c < y$. Dans ce cas, on a $|x - c| < |x - y| < \delta_1$ et $|y - c| < |x - y| < \delta_2$. Il suit que

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(c)| + |f(c) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On conclut que f est uniformément continue sur (a, b).

4. Autres

Exercice 21. Soit $f \colon (a, b) \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Soit $x \in [a, b]$ et soit (x_n) une suite de (a, b) qui converge vers x.

a) Montrer que $(f(x_n))$ est une suite de Cauchy.

b) Montrer que f se prolonge continûment sur $[a, b]$.

Exercice 22. Montrer que $f(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $(0, 1]$.
Indice. Utilisez le numéro précédent.

Solution. Puisque $f(x) \to \infty$ lorsque $x \to 0^+$, il est impossible de prolonger continûment f sur $[0, 1$, donc f n'est pas uniformément continue sur $(0, 1]$.

De façon général, si une fonction $f\colon (a, b] \to \mathbb{R}$ possède une asymptote verticale en a, alors elle n'est assurément pas uniformément continue.

Exercice 23. Soit $b > 1$. Pour $x > 0$, on définit

$$b^x := \sup\{b^p \mid p \in \mathbb{Q} \text{ et } 0 \leq p \leq x\}.$$

a) Montrer que si x est rationnel, la définition de b^x correspond à celle donnée plus tôt dans le cours.

b) Montrer que si $< y$, alors $b^x < b^y$.

c) Pour $x < 0$, on définit $b^x := \frac{1}{b^{-x}}$. Montrer que $x \mapsto b^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

d)† Montrer que pour tout $y \in (0, \infty)$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $b^x = y$. On appelle x le *logarithme en base b de y*.

e) Conclure que $x \mapsto b^x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 24. a) Montrer que exp est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(x) = e^x$. (Voir l'exercice 23 pour la définition de e^x.)

Exercice 25. Aux exercices 23 et 24, on a montré que $\exp\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ était bijective. On note par log son inverse et on l'appelle le *logarithme* ou *logarithme naturel*. Montrer que

a) $\log 1 = 0$;

b) $\log e = 1$;

c) $\log(xy) = \log x + \log y$;

d) log est continue.

Exercice 26. Montrer que $f(x) = \log x$ n'est pas uniformément continue sur $(0, 1)$. Est-elle uniformément continue sur $[1, \infty)$?