Analyse 1

Série 4

Continuité

1. Limites de fonctions

Exercice 1. Calculer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{x^2+7}$ c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} f(x), \quad$ où $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si } x \geq 0, \\ \dfrac{x+1}{2x^2+x-1}, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

h) $\lim\limits_{x\to 1} f(x), \quad$ où $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}, & \text{si } x \geq 1, \\ \sqrt{1-x}, & \text{si } x < 1 \end{cases}$

Exercice 2. Montrer que la limite lorsque $x \to 1$ de $\left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right)$ tend vers -1.

Exercice 3. Déterminer le domaine de la fonction $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{nx}$.

Exercice 4. Soit $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ deux fonctions et soit $a \in \overline{D}$.

a) Trouver un exemple pour lequel $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x) + g(x)\big)$ existe, mais $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ n'existe pas.

b) Si $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x) + g(x)\big)$ et $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x) - g(x)\big)$ existent, peut-on conclure que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existent?

Exercice 5. Soit $D \subseteq \mathbb{R}$, $a \in D$ et $f\colon D \to \mathbb{R}$.

a) Montrer que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} \Big(f(x) - L\Big) = 0$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x+a)$.

c) On suppose que $a = 0 \in D$. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x^3)$.

Exercice 6. Calculer la limite de $\frac{\lfloor x \rfloor - x}{x}$ lorsque $x \to 0$, si elle existe.

2. Fonctions continues en un point

Exercice 7. a) Soit f une fonction qui est telle que $|f(x)| \leq |x|$ pour tout x. Montrer que f est continue en 0.

b) Soit g une fonction telle que $g(0) = 0$ et g est continue en 0. Montrer que si $|f(x)| \leq |g(x)|$, alors f est continue en 0.

Exercice 8. a) Montrer que $f(x) = \max\{0, x\}^2$ est continue en 0.

b) La fonction possède-t-elle des points de discontinuité?

Exercice 9. Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on ait $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Montrer que si f est continue en 0, alors f est continue en a pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 10. Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Soit $a \in I$ un point et $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction continue en a. Montrer que si $f(a) \neq 0$, alors il existe $r > 0$ tel que $(a-r, a+r) \subseteq I$ et $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in (a-r, a+r)$.

Exercice 11. Montrer que exp est continue en 0.

Exercice 12. Soit $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

a) Quel est le plus grand domaine de définition de f? Montrer que f est continue sur son domaine.

b) Existe-t-il un prolongement continue en 1?

3. Fonctions continues sur un intervalle

Exercice 13. Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty,$$

alors f possède au moins un zéro.

Exercice 14. Soit $a < b < c$. Soit $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ et $h: [b,c] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On pose

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{si } x \in [a,b], \\ h(x), & \text{si } x \in (b,c]. \end{cases}$$

Sous quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on que f est continue?

Exercice 15. Montrer que les fonctions suivantes ont au moins un zéro. Donner une approximation de la racine à au plus $\frac{1}{2}$.

a) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 2$

b) $f(x) = e^x + \log x$

Exercice 16. Soit $f\colon(-1,1) \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^2$. Calculer $\sup_{(-1,1)} f(x)$ et $\inf_{(-1,1)} f(x)$. Est-ce que f atteint son maximum? Son minimum? Cela contredit-il le théorème vu en classe sur le maximum et le minimum de f?

Exercice 17. Soit $f\colon[0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Montrer que f possède un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe un x tel que $f(x) = x$.
Indice. Utilisez le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 18. Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Soit $E \subseteq D$ un sous-ensemble dense dans D. Montrer que si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in E$, alors $f = g$ sur D.

Exercice 19. Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$. Soit $K \in (0, \infty)$ un nombre tel que pour tout $x, y \in D$, on ait

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 20. Soit $I = (a, b)$ un intervalle. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit c tel que $a < c < b$. Montrer que si f est uniformément continue sur $(a, c]$ et sur $[c, b)$, alors f est uniformément continue sur (a, b).

4. Autres

Exercice 21. Soit $f\colon(a,b) \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Soit $x \in [a, b]$ et soit (x_n) une suite de (a, b) qui converge vers x.

a) Montrer que $(f(x_n))$ est une suite de Cauchy.
b) Montrer que f se prolonge continûment sur $[a, b]$.

Exercice 22. Montrer que $f(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $(0, 1]$.
Indice. Utilisez le numéro précédent.

Exercice 23. Soit $b > 1$. Pour $x > 0$, on définit

$$b^x := \sup\{b^p \mid p \in \mathbb{Q} \text{ et } 0 \leq p \leq x\}.$$

a) Montrer que si x est rationnel, la définition de b^x correspond à celle donnée plus tôt dans le cours.
b) Montrer que si $x < y$, alors $b^x < b^y$.
c) Pour $x < 0$, on définit $b^x := \frac{1}{b^{-x}}$. Montrer que $x \mapsto b^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
d)† Montrer que pour tout $y \in (0, \infty)$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $b^x = y$. On appelle x le *logarithme en base b de y*.
e) Conclure que $x \mapsto b^x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 24. a) Montrer que exp est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(x) = e^x$. (Voir l'exercice 23 pour la définition de e^x.)

Exercice 25. Aux exercices 23 et 24, on a montré que $\exp\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ était bijective. On note par log son inverse et on l'appelle le *logarithme* ou *logarithme naturel*. Montrer que

a) $\log 1 = 0$;

b) $\log e = 1$;

c) $\log(xy) = \log x + \log y$;

d) log est continue.

Exercice 26. Montrer que $f(x) = \log x$ n'est pas uniformément continue sur $(0, 1)$. Est-elle uniformément continue sur $[1, \infty)$?