Analyse 1

Série 2

Suites (solutionnaire)

1. Convergence

Exercice 1. Trouver un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a :

a) $\left|\frac{2n}{2n+3} - 1\right| < \frac{1}{327}$ b) $\left|\frac{n^2-2}{3n^2+4} - \frac{1}{3}\right| < \frac{1}{826}$

Exercice 2. Pour chaque suite suivante, trouver un candidat $L \in \mathbb{R}$ et montrer que cette suite converge vers L en utilisant la définition de limite.

a) $a_n = \frac{5n+8}{2n+3}$ b) $a_n = \frac{n^2}{n^2+4}$ c) $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2}$

Solution. b) Secrètement, on sait que la limite est 1. On montre donc que $a_n \to 1$ lorsque $n \to \infty$ en utilisant la définition de la limite.

Soit $\varepsilon > 0$. D'un part, on a

$$\begin{aligned}\left|\frac{n^2}{n^2+4} - 1\right| &= \left|\frac{n^2-n^2-4}{n^2+4}\right| \\ &= \frac{4}{n^2+4}.\end{aligned}$$

On cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, alors $\frac{4}{n^2+4} < \varepsilon$. En réarrangeant les termes, cela devient $\frac{4}{\varepsilon} - 4 < n^2$. Ainsi, si on prend $N = \left\lfloor \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rfloor + 1$, alors lorsque $n \geq N$, on a bien

$$\left|\frac{n^2}{n^2+4} - 1\right| = \frac{4}{n^2+4} < \varepsilon,$$

comme voulu.

c) On peut réécrire a_n sous la forme

$$a_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{1}{n^2}\frac{(n-1)n}{2} = \frac{n^2-n}{2n^2}.$$

Ainsi, secrètement on sait que la suite tend vers $\frac{1}{2}$. On le montre à l'aide de la définition.

Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$\begin{aligned}\left|\frac{n^2-n}{2n^2} - \frac{1}{2}\right| &= \left|\frac{n^2-n-n^2}{2n^2}\right| \\ &= \frac{1}{2n}.\end{aligned}$$

Si on prend $N = \left\lfloor \frac{1}{2\varepsilon} \right\rfloor + 1$, alors si $n \geq N$, on a que

$$n \geq \left\lfloor \frac{1}{2\varepsilon} \right\rfloor + 1 > \frac{1}{2\varepsilon}$$

qui se réécrit en $\frac{1}{2n} < \varepsilon$, ce qui montre que $a_n \to \frac{1}{2}$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice 3. Déterminer si chacune des suites suivantes est bornée.

a) $a_n = (-1)^n n$ b) $a_n = 5^{1+(-1)^n}$ c) $a_n = \left(n + \dfrac{1}{n}\right)^2$

d) $a_n = \dfrac{3n^2 + 7}{6n^2 + 5}$ e) $a_n = (n+1)^2 - (n^2 + 2n)$

Solution. a) La suite (a_n) est non bornée. On suppose d'abord qu'elle est majorée. Soit M un majorant. Pour tout $n = 2k$ pair, on a $a_{2k} = 2k \leq M$. Or, par le principe d'Archimède, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > M$. Si N est pair, alors $a_N > M$ ce qui est une contradiction. Sinon, $N + 1$ est pair, ce qui mène également à une contradiction.

On montre que la suite n'est pas minorée de la même façon.

b) On voit que la suite est de la forme $(a_n) = (1, 25, 1, 25, 1, 25, 1, 25, \ldots)$. Cette suite majorée par 25 et minorée par 1, donc elle est bornée.

Exercice 4. a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$ est bornée et divergente.

b) La suite dont le terme général est $b_n = \frac{1}{2}\big(1 + (-1)^{n+1}\big)$ converge-t-elle?

Exercice 5. On définit les suites (a_n) et (b_n) par

$$a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \qquad \text{et} \qquad b_n = a_n + \frac{1}{2n+1}.$$

a) Montrer que (a_n) est croissante et que (b_n) est décroissante.

b) Montrer qu'elles convergent toutes les deux.
Indice. Remarquez que $\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1}$ est positif quelque soit $k \in \mathbb{N}$.

Solution. a) On montre en premier que (a_n) est croissante. Pour ce faire, on montre que $a_{n+1} - a_n \geq 0$. On a

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \geq \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+2} = 0.$$

On montre maintenant que (b_n) est décroissante. On a

$$b_{n+1} - b_n = a_{n+1} - a_n + \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+1}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+1} \\
&= \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} \\
&\leq \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+2} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

b) Si on montre que (a_n) est majorée, alors on pourra conclure qu'elle converge. D'abord, on remarque que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1} \geq \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+1} = 0.$$

Ainsi, on a

$$
\begin{aligned}
a_n &= 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n-1}\right) - \frac{1}{2n} \\
&\leq 1 - 0 - 0 - \cdots - 0 - \frac{1}{2n} \\
&\leq 1.
\end{aligned}
$$

D'où (a_n) est convergente.

Pour (b_n), l'idée est similaire. On a

$$
\begin{aligned}
b_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2n+1} \\
&\geq 0 + 0 + \cdots + 0 + 0 = 0.
\end{aligned}
$$

D'où (b_n) est minorée, donc convergente.

Exercice 6. Soit (a_n) une suite. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

1. (a_n) converge;
2. pour tout $M \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la suite (a_{n+M}) converge;
3. il existe $M \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tel que la suite (a_{n+M}) converge.

Montrer dans ce cas que

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+M} = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Exercice 7. Soit $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite. Montrer que si (a_n) est décroissante à partir du rang $M \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ et est minorée, alors (a_n) converge et

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N},\ n \geq M\}.$$

Exercice 8. Soit (a_n) et (b_n) deux suites qui convergent vers L. Montrer que la suite

$$(c_n) = (a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots)$$

converge aussi vers L.

Exercice 9. Soit (a_n) et (b_n) deux suites telles que $a_n \geq 0$ et $b_n \geq 0$. On définit la suite (c_n) par

$$(c_n) = (a_1, -b_1, a_2, -b_2, a_3, -b_3, \cdots).$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur (a_n) et (b_n) qui permet de conclure que (c_n) converge.

Solution. Il faut et il suffit que (a_n) et (b_n) convergent toutes deux vers 0. En effet, si (a_n) et (b_n) convergent vers 0, alors le numéro 8 montre que $c_n \to 0$.

Ensuite, si on suppose que (c_n) converge, disons vers L, alors pour $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $|c_n - L| < \varepsilon$. En particulier, on a $|c_{2n-1} - L| = |a_n - L| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$ et donc $a_n \to L$. De même, on a $|c_{2n} - L| = |-b_n - L| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$ et donc $b_n \to -L$. Or, on voit que $-b_n \leq 0 \leq a_n$ et pour $n \geq N$, on a

$$\begin{aligned} |b_n + L| < \varepsilon \quad &\Rightarrow \quad L < \varepsilon - b_n \leq \varepsilon \\ |L - a_n| < \varepsilon \quad &\Rightarrow \quad -\varepsilon \leq -\varepsilon + a_n < L. \end{aligned}$$

En combinant, on trouve $-\varepsilon < L < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, d'où $L = 0$.

Exercice 10. Soit (s_n) une suite. On pose

$$t_n = \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

a)† Montrer que si $s_n \to s$ lorsque $n \to \infty$, alors $t_n \to s$ lorsque $n \to \infty$.

b) Trouver une suite (s_n) qui diverge, mais pour laquelle (t_n) converge.

Solution. a) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $s_n \to s$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, alors $|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}$. On pose $M = \max\{|s_1 - s|, |s_2 - s|, \ldots, |s_{N-1} - s|\}$. Ensuite, il existe $N_1 \in N$ tel que si $n \geq N_1$, alors $\frac{(N-1)M}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, pour $n \geq \max\{N, N_1\}$, on a

$$\begin{aligned} |t_n - s| &= \left| \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n} - s \right| \\ &= \left| \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n - ns}{n} \right| \\ &= \left| \frac{(s_1 - s) + (s_2 - s) + \cdots + (s_n - s)}{n} \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |s_k - s| && \text{(inégalité triangulaire)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1}|s_k - s| + \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}|s_k - s| \\
&< \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1}|s_k - s| + \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}\frac{\varepsilon}{2} && (\text{car } k \geq N \Rightarrow |s - s_k| < \tfrac{\varepsilon}{2}) \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1} M + \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}\frac{\varepsilon}{2} && (\text{car } 1 \leq k < N \Rightarrow |s_k - s| \leq M) \\
&= \frac{(N-1)M}{n} + \frac{(n-N)}{n}\frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \frac{(N-1)M}{n} + \frac{\varepsilon}{2} && (\text{car } \tfrac{n-N}{n} \leq 1) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, && (\text{car } n \geq N_1 \Rightarrow \tfrac{(N-1)M}{n} < \tfrac{\varepsilon}{2})
\end{aligned}
$$

d'où $t_n \to s$.

b) Soit $(s_n) = (1, 0, 1, 0, 1, \dots)$. Par le numéro 4, on sait qu'elle diverge. Par contre, on voit que

$$
t_n = \begin{cases} \frac{1+0+1+\cdots+0}{n} = \frac{n/2}{n} = \frac{1}{2}, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{1+0+1+\cdots+1}{n} = \frac{(n+1)/2}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}
$$

Par le numéro 8, avec $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$ et $(b_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots\right)$, on conclut que $t_n \to \frac{1}{2}$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice 11. Soit (a_n) une suite.

a) Montrer que si $a_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$, alors (a_n) est minorée. Déduire que si $a_n \to -\infty$ lorsque $n \to \infty$, alors (a_n) est majorée.

b) Si $|a_n| \to \infty$, a-t-on nécessairement que $a_n \to \infty$ ou $a_n \to -\infty$ lorsque $n \to \infty$?

Exercice 12. Pour chaque suite, déterminer si elle est bornée. Si elle n'est pas bornée, déterminer si elle tend vers ∞, vers $-\infty$ ou ni l'un ni l'autre.

a) $\left(\frac{2^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ b) $\left((-1)^n n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ c) $\left(\frac{n^2-\sqrt{n}}{\sqrt{1+n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Solution. a) Cette suite tend vers ∞. L'inégalité de Bernoulli n'est pas tout à fait assez fine ici. On a

$$
2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \geq 1 + n + \frac{n!}{2!\,(n-2)!} = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2}.
$$

Ainsi, pour $n \geq 2$, on a

$$\frac{2^n}{n} = \frac{1}{n} + 1 + \frac{n-1}{2} \geq \frac{n-1}{2} \geq \frac{n}{4}.$$

Ainsi, pour tout $M \in \mathbb{R}$, on prend $N = \max\{1, \lfloor M \rfloor + 1\}$. Si $n \geq N$, alors $\frac{2^n}{n} \geq \frac{n}{4} \geq M$. D'où $a_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$.

b) Cette suite n'est pas bornée et elle ne tend pas vers $\pm\infty$. Au numéro 3a), on a montré que la suite n'est pas bornée.

On pose $a_n := (-1)^n n$. On suppose par l'absurde que $a_n \to +\infty$. Soit $M = 1$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on voit que $a_{2N+1} = -(2N+1) < M$, ce qui contredit le fait que $a_n \to +\infty$.

De la même façon, si $a_n \to -\infty$, alors avec $M = -1$, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on viot que $a_{2N} = 2N > -1$, ce qui contredit le fait que $a_n \to -\infty$.

Exercice 13. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers $+\infty$. Montrer qu'il existe un rang $K \in \mathbb{N}$ tel que la suite $\left(\frac{1}{a_{n+K-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
Attention! Assurez vous qu'il n'y a pas de division par zéro.

Exercice 14. Limite supérieure. Soit (a_n) une suite majorée. On définit la suite (b_n) par

$$b_n = \sup_{m\geq n} a_m := \sup\{a_m \mid m \in \mathbb{N},\ m \geq n\}. \qquad (*)$$

a) Montrer que (b_n) est décroissante.

b) Montrer que si $a_n \not\to -\infty$, alors (b_n) est minorée. Conclure que la suite converge dans ce cas.

c) Montrer que si $a_n \to -\infty$, alors $b_n \to -\infty$ lorsque $n \to \infty$.

Définition. Dans les cas de b) et c), la suite (b_n) a une limite; on l'appelle *la limite supérieure de* a_n et on pose

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Si (a_n) n'est pas majorée, alors on pose $\limsup_{n\to\infty} a_n := \infty$. Dans tous les cas, la limite supérieure existe ou tend vers $\pm\infty$.

d) Montrer que si (a_n) est bornée, alors on a

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\geq 1} \sup_{m\geq n} a_m \qquad (**)$$

où on utilise la notation $\inf_{n\geq 1} c_n := \inf\{c_n \mid n \in \mathbb{N},\ n \geq 1\}$ et celle de $(*)$.

e) Donner une définition pour la limite inférieure de (a_n) en s'inspirant de a), b) et c). Montrer que cette limite existe ou qu'elle tend vers $\pm\infty$ et trouver une formule analogue à $(**)$.

2. Calcul de limites

Exercice 15. Soit (a_n) une suite telle que $a_n \geq 0$ pour tout n et qui converge vers $a \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{a}$.

Solution. Pour améliorer la lisibilité, on pose $x_n = \sqrt[p]{a_n}$ et $x = \sqrt[p]{a}$, de sorte que $x_n^p = a_n$ et $x^p = a$. Ainsi, l'hypothèse devient $x_n^p \to x^p$ et on veut montrer que $x_n \to x$. Soit $\varepsilon > 0$.

On commence par le cas où $x = 0$. Comme on veut $|x| < \varepsilon$, il suffit de voir qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, alors $0 \leq x_n^p < \varepsilon^p$. En prenant la racine p-ième, on a bien $0 \leq x_n < \varepsilon$, c'est-à-dire $|x_n| < \varepsilon$.

Ensuite, on suppose que $x > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, alors $|x_n^p - x^p| < x^{p-1}\varepsilon$. Ensuite, on a

$$|x_n^p - x^p| = |x_n - x|(x_n^{p-1} + x_n^{p-2}x + \cdots + x_n x^{p-2} + x^{p-1}) \geq |x_n - x|x^{p-1}.$$

Ainsi, on voit que lorsque $n \geq N$, on a $|x_n - x| \leq \frac{1}{x^{p-1}}|x_n^p - x^p| < \frac{x^{p-1}\varepsilon}{x^{p-1}} = \varepsilon$. On conclut que $x_n \to x$.

Exercice 16. Calculer la limite des suites dont le terme général est donné par les expressions suivantes.

a) $\dfrac{n^3 - 1}{(n-1)(n^2+n+1)}$

b) $\left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^{500}$

c) $\dfrac{3n^2 + 7\sqrt{n} + 3}{7n^2 + 2}$

d) $\dfrac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+12}}$

e) $\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}$

f) $\sqrt[n]{1 + n + n^2}$

g) $\sqrt{n^2 + n} - n$

h) $\dfrac{2^n}{n!}$

Exercice 17. Soit (a_n) et (b_n) deux suites.

a) Trouver un exemple de (a_n) et (b_n) bornées telles que $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ existe, mais (a_n) ou (b_n) divergent.

b) Si $(a_n b_n)$ converge, alors (a_n) et (b_n) convergent-elles?

c) Si $(a_n b_n)$ et $(a_n + b_n)$ convergent, alors (a_n) et (b_n) convergent-elles?

Exercice 18. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $0 < y \leq x$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^n + y^n} = x$.

Solution. D'une part, on a

$$\sqrt[n]{x^n + y^n} > \sqrt[n]{x^n + 0} = x.$$

D'autre part, on a

$$\sqrt[n]{x^n + y^n} \leq \sqrt[n]{x^n + x^n} = x\sqrt[n]{2}.$$

Par le théorème des deux gendarmes, puisque $x\sqrt[n]{2} \to x$ lorsque $n \to \infty$, on obtient la conclusion.

Exercice 19. Calculer les limites suivantes, si elles existent.

a) $\sqrt[n]{1+\sqrt[n]{2^n+n}}$ b) $\sqrt[n]{n}-\sqrt[2n]{n}$ c) $a_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{2n-2}}$

Solution. a) On pose $a_n = \sqrt[n]{2^n+n}$. On montre d'abord que (a_n) converge. On a

$$a_n = 2\sqrt[n]{1+\tfrac{n}{2^n}} \leq 2\sqrt[n]{2} \to 2 \qquad (n \to \infty).$$

De plus, il est clair que $2 = \sqrt[n]{2^n} \leq a_n$ et donc par le théorème des deux gendarmes, il suit que $a_n \to 2$ lorsque $n \to \infty$. En particulier, cette suite est bornée, disons pas M. On a donc

$$1 \leq \sqrt[n]{1+\sqrt[n]{2+n}} \leq \sqrt[n]{1+M} \to 1 \quad (n \to \infty).$$

Il s'ensuit que la suite converge vers 1.

b) On sait que $\sqrt[n]{n} \to 1$ lorsque $n \to \infty$. Ensuite, on a $\sqrt[2n]{n} = \sqrt{\sqrt[n]{n}} \to \sqrt{1} = 1$ lorsque $n \to \infty$. Il s'ensuit que

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n}-\sqrt[2n]{n}) = 1-1 = 0.$$

Exercice 20. Soit (a_n) et (b_n) les suites de l'exercice 5. Montrer que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

Exercice 21. Calculer la limite de la suite définie par $c_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

Solution. D'abord, on voit que (c_n) est majorée par 1. En effet, on a

$$c_n \leq \frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n} = 1.$$

Ainsi, on se doute que c_n converge vers 1, donc on essaie de minorée c_n astucieusement.

On a

$$c_n \geq \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}.$$

Ensuite, on a

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \to 1$$

lorsque $n \to \infty$.

Ainsi, on a

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq c_n \leq 1.$$

Si on laisse $n \to \infty$, par le théorème des deux gendarmes, on conclut que $c_n \to 1$.

Exercice 22. Soit la suite

$$a_n = \frac{1}{n!} + \frac{2!}{n!} + \frac{3!}{n!} + \cdots + \frac{(n-1)!}{n!} + 1.$$

Calculer la limite de (a_n), si elle existe.

Exercice 23. Calculer la limite de la suite (a_n), dont le terme général est donné par

a) $a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$ b) $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ c)* $a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$

d) $a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n}$ e) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$ f) $a_n = \left(1 + \frac{m}{n}\right)^{kn}$ où $m, k \in \mathbb{N}$.

Suggestion pour le c). Considérez d'abord $(a_n)^n$.

Solution. Soit $x > 0$. On montre d'abord que $b_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ est croissante; c'est le même argument qu'en classe. On a

$$\begin{aligned}
b_n &= \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(x^k A_{k,n}\right) && \left(\text{où } A_{k,n} := \tfrac{(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})}{k!}\right) \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \left(x^k A_{k,n+1}\right) + x^{n+1} A_{n+1,n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \left(x^k A_{k,n+1}\right) \\
&= b_{n+1}.
\end{aligned}$$

a) On considère la sous-suite (a_{2n}). On a

$$a_{2n} = \left(1 + \frac{2}{2n}\right)^{2n} = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^2 \longrightarrow e^2$$

lorsque $n \to \infty$. Ainsi, puisque (a_n) est croissante et que l'une de ses sous-suites converge vers e^2, on a que $a_n \to e^2$.

b) On a

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n-1} \longrightarrow e^{-1}$$

lorsque $n \to \infty$.

c) On pose $b_n = a_n^n$. C'est une sous-suite de la suite du b), donc elle converge vers e^{-1}. Ainsi, on a $a_n = \sqrt[n]{b_n} \to 1$ lorsque $n \to \infty$.

d) En utilisant le a), on voit que $a_n \to e^6$.

e) On voit que $b_n = a_n^{\sqrt{n}} \to e$ lorsque $n \to \infty$. Ainsi, la suite (b_n) est borné, disons par M. On a donc $1 \leq a_n = b_n^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \leq M^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \to 1$ lorsque $n \to \infty$. D'où $a_n \to 1$ par le théorème des deux gendarmes.

f) De la façon qu'au a), on a $\left(1 + \frac{m}{n}\right)^n \to e^m$ lorsque $n \to \infty$. Il suit que $a_n \to e^{mk}$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice 24. Pour quels valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la suite

$$s_n = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \cdots + \frac{x^n}{2^n}$$

converge-t-elle? Lorsqu'elle converge, déterminer la valeur de la limite.

Exercice 25. Soit E un ensemble non vide et majoré. Soit $S := \sup E$. Montrer qu'il existe une suite (a_n) dans E (c.-à-d. $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq E$) telle que $a_n \to S$ lorsque $n \to \infty$.

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On montre qu'il existe un élément $a_n \in E$ tel que $a_n > S - \frac{1}{n}$. Supposons le contraire, alors pour tout $e \in E$, on a $e \leq S - \frac{1}{n}$. Il s'ensuit que $S - \frac{1}{n}$ est un majorant de E et on voit que $S - \frac{1}{n} < S$, donc c'est un plus petit majorant que le suprémum, ce qui est une contradiction.

Ainsi, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in E$ tel que

$$S - \frac{1}{n} < a_n \leq S.$$

Par le théorème des deux gendarmes, on conclut que $a_n \to S$, comme voulu.

3. Sous-suites, suites de Cauchy et suites récurrentes

Exercice 26. Trouver une sous-suite convergente des suites suivantes, si possible.

a) $a_n = (-1)^n n$ b) $a_n = \left(\frac{1}{n} - 1\right)^n$ c) $a_n = \left\lfloor \frac{n}{2^n} \right\rfloor$

Solution. a) Il n'y a aucune sous-suite convergente. En effet, supposons le contraire. Soit (a_{n_k}) une sous-suite telle que $a_{n_k} \to L \in \mathbb{R}$. On voit que $|a_n| = n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$. Puisque $(|a_{n_k}|)$ est une sous-suite de $(|a_n|)$, il suit qu'elle tend aussi vers ∞. Or, puisque $a_{n_k} \to L$, on doit avoir $|a_{n_k}| \to |L|$, ce qui est une contradiction, car $|L| \in \mathbb{R}$.

b) La sous-suite (a_{2n}) est convergente. En effet, on a

$$a_{2n} = \left(\frac{1}{2n} - 1\right)^{2n} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2n} \longrightarrow e$$

lorsque $n \to \infty$, car (a_{2n}) est une sous-suite de $b_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2n}$, qui converge vers e.

c) Par l'inégalité de Bernoulli, on a $2^n = (1+1)^n \geq 1+n > n$. On voit que $0 \leq \frac{n}{2^n} < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\lfloor \frac{n}{2^n} \rfloor = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, (a_n) est convergente et (a_n) est une sous-suite de (a_n).

Exercice 27. Soit (a_n) une suite dont tous les termes sont positifs ou nuls. On pose $b_n = (-1)^n a_n + (-1)^{n+1}$. Quelle condition sur (a_n) est suffisante pour déterminer que (b_n) possède une sous-suite convergente?

Solution. Il y a plus d'une réponse possible. Si (a_n) est bornée, alors (b_n) est bornée. Dans ce cas, (b_n) possède une sous-suite convergente par le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Une condition un peu plus générale est de supposer que (a_n) possède une sous-suite convergente, disons (a_{n_k}). Dans ce cas, (a_{n_k}) est bornée, donc (b_{n_k}) est bornée et cette dernière possède une sous-sous-suite convergente par le théorème de Bolzano-Weierstrass. Or, une sous-sous-suite est en particulier une sous-suite, donc (b_n) possède une sous-suite convergente dans ce cas aussi.

Exercice 28. Soit la suite dont le terme général est $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$. Montrer par récurrence que $a_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$. Déduire que (a_n) diverge.

Exercice 29. Soit (a_n) une suite. Montrer que s'il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que pour toute sous-suite (a_{n_k}), il existe une sous-sous-suite $\left(a_{n_{k_\ell}}\right)$ qui converge vers L, alors $a_n \to L$ lorsque $n \to \infty$.

Solution. On suppose le contraire. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq k$ tel que $|a_n - L| \geq \varepsilon$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on note par n_k le naturel qui est tel que $n_k \geq k$ et $|a_{n_k} - L| \geq \varepsilon$. Par hypothèse, il existe un sous-sous-suite $\left(a_{n_{k_\ell}}\right)$ telle que $a_{n_{k_\ell}} \to L$ lorsque $\ell \to \infty$. Or, par construction de (a_{n_k}), on doit avoir $|a_{n_{k_\ell}} - L| \geq \varepsilon$, ce qui veut dire que $\left(a_{n_{k_\ell}}\right)$ ne converge pas vers L, un contradiction.

Exercice 30. Soit $a_1 = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $a_{n+1} = \frac{2a_n+3}{6}$.

a) Montrer que (a_n) converge.

b) Calculer la limite.

Solution. a) On peut réécrire l'expression de a_n en $a_{n+1} = \frac{a_n}{3} + \frac{1}{2}$. On montre que a_n est minorée et décroissante.

D'abord, on a

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2} - a_n = -\frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}.$$

Ainsi, on a $a_{n+1} - a_n \leq 0$ si et seulement si $\frac{3}{4} \leq a_n$. Pour a_1, cela est vraie. On suppose que $a_n \geq \frac{3}{4}$ et on montre que c'est le cas pour a_{n+1}. On a

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{3}\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Par le principe de récurrence, on conclut que (a_n) est décroissante. On a montré en même temps que (a_n) est minorée par $\frac{3}{4}$. On conclut que (a_n) converge.

b) Maintenant que l'on sait que a_n converge, on peut écrire $a_n \to L$ lorsque $n \to \infty$, pour un certain $L \in \mathbb{R}$. Si on laisse $n \to \infty$ dans l'égalité $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2}$, alors on a $L = \frac{L}{3} + \frac{1}{2}$. En résolvant l'équation, on trouve $L = \frac{3}{4}$.

Exercice 31. Soit $s_1 = \sqrt{2}$. On pose

$$s_{n+1} := \sqrt{2 + \sqrt{s_n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que (s_n) converge et que $s_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 32. Soit (a_n) la suite définie par $a_1 = 2$ et $a_{n+1} = 2a_n^2$ $(n \in \mathbb{N})$.

a) Montrer que si a_n converge vers L, alors soit $L = 0$ ou $L = \frac{1}{2}$.

b) La suite converge-t-elle?

Solution. b) Non, car on a $a_n \geq 2$ pour tout n. En effet, pour a_1, cela est clair. Par récurrence, on a $a_{n+1} = 2a_n^2 \geq 22^2 = 8 > 2$. Ainsi, si (a_n) converge, on a $L \geq 2$. Or, par le a), si (a_n) converge, on aurait $L = 0$ ou $L = \frac{1}{2}$. Il est ainsi impossible que (a_n) converge.

Exercice 33. À l'aide de la définition, montrer que :

a) $a_n = \frac{n+2}{n}$ est une suite de Cauchy;

b) $a_n = (-1)^n$ n'est pas une suite de Cauchy.

Solution. a) Soit $n, k \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
|a_{n+k} - a_n| &= \left| \frac{n+k+2}{n+k} - \frac{2+n}{n} \right| \\
&= \left| 1 + \frac{2}{n+k} - 1 - \frac{2}{n} \right| \\
&= \left| \frac{2n - 2n - 2k}{n(n+k)} \right| \\
&= \frac{2k}{n(n+k)} \\
&\leq \frac{2}{n} && \left(\text{car } \tfrac{k}{n+k} \leq 1\right).
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $N = \left\lfloor \frac{2}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$. Si $n \geq N$, alors on voit que $n \geq \left\lfloor \frac{2}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 > \frac{2}{\varepsilon}$ et donc $\varepsilon > \frac{2}{n}$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $n + k \geq N$ et

$$|a_{n+k} - a_n| \leq \frac{2}{n} < \varepsilon,$$

d'où (a_n) est une suite de Cauchy.

b) Une suite n'est pas de Cauchy s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n, m \geq N$ tel que $|a_n - a_m| \geq \varepsilon$. On prend $\varepsilon = 1$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on voit que

$$a_N - a_{N+1} = \begin{cases} -2, & \text{si } N \text{ est impair,} \\ 2, & \text{si } N \text{ est pair.} \end{cases}$$

Dans les deux cas, on a $|a_N - a_{N+1}| = 2 > \varepsilon = 1$, d'où (a_n) n'est pas Cauchy.

Exercice 34. Soit (b_n) une suite telle que $b_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Soit (a_n) une autre suite. Montrer que si pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|a_{n+k} - a_n| \leq |b_n|,$$

alors (a_n) est une suite de Cauchy.

Exercice 35. Soit (a_n) et (b_n) deux suites telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$|a_{n+1} - a_n| \leq b_n.$$

a) Soit $s_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. On suppose que (s_n) converge. Montrer que (a_n) est une suite de Cauchy.

b) Si on a plutôt que $b_n \to 0$, alors (a_n) est-elle une suite de Cauchy?

Solution. a) D'abord, on remarque que l'hypothèse donne $b_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, il est résulte que (s_n) est croissante. Soit $n, k \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
|a_{n+k} - a_n| &= |a_{n+k} - a_{n+k-1} + a_{n+k-1} - a_{n+k-2} + \cdots + a_{n+1} - a_n| \\
&\leq |a_{n+k} - a_{n+k-1}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \\
&= \sum_{m=0}^{k-1} |a_{n+m+1} - a_{n+m}| \\
&\leq \sum_{m=0}^{k-1} b_{n+m} \\
&\leq \sum_{m=n}^{n+k-1} b_m \\
&= s_{n+k-1} - s_n \\
&= |s_{n+k-1} - s_n| \qquad \text{(car } (s_n) \text{ est croissante).}
\end{aligned}$$

Puisque (s_n) est convergente, c'est une suite de Cauchy, donc pour $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$ et $k \in \mathbb{N}$, alors $|s_{n+k-1} - s_n| < \varepsilon$. On a ainsi que l'inégalité précédente est plus petite que ε pour $n \geq N$ et $k \in \mathbb{N}$. D'où (a_n) est Cauchy.

b) Non. Il suffit de considérer la suite $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. Dans ce cas, on peut prendre $b_n = \frac{1}{n+1}$. On voit que

$$|a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, (a_n) et (b_n) sont telles que demandées, mais (a_n) n'est pas convergente, comme on a vu en classe, donc elle n'est pas Cauchy.

Exercice 36. Soit (a_n) une suite. On suppose qu'il existe $\ell \in (0, \infty)$ tel que pour tout $n \geq 2$, on ait

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \ell |a_n - a_{n-1}|.$$

a) Montrer que $|a_{n+1} - a_n| \leq \ell^{n-1} |a_2 - a_1|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$|a_{n+k} - a_n| \leq |a_2 - a_1| \ell^{n-1} \frac{1 - \ell^k}{1 - \ell}.$$

c) Montrer que si $\ell < 1$, alors (a_n) est une suite de Cauchy.

Exercice 37. Soit (a_n) la suite définie par

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n^3 + a_n^2, & \text{si } n \geq 2; \\ a_1 = -\frac{1}{8}. \end{cases}$$

a) Montrer que $|a_n| \leq \frac{1}{4}$ pour tout n.

b) Montrer que $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{11}{16} |a_n - a_{n-1}|$.

c) Conclure que a_n est une suite de Cauchy. Quelle est la limite?

Exercice 38. On pose $a_1 = 2$ et $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que a_n est un nombre rationnel pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2} |a_n - a_{n-1}|$ pour tout entier $n \geq 2$. Déduire que (a_n) est Cauchy.
Indice. Montrez d'abord que $1 \leq a_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution. b) D'abord, on montre que $1 \leq a_n \leq 2$. Par récurrence sur n, il est clair cela est vrai pour a_1. On suppose l'inégalité vraie pour a_n et on montre qu'elle est vraie pour a_{n+1}. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} \\ &\leq \frac{2}{2} + \frac{1}{1} = 2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} \\ &\geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

Ensuite, pour $n \geq 2$ entier, on a

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - a_n| &= \left| \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} - \frac{a_{n-1}}{2} - \frac{1}{a_{n-1}} \right| \\ &= \left| \frac{a_n^2 a_{n-1} + 2a_{n-1} - a_{n-1}^2 a_n - 2a_n}{2a_n a_{n-1}} \right| \\ &= \left| \frac{(a_n a_{n-1} - 2)(a_n - a_{n-1})}{2a_n a_{n-1}} \right| \\ &= \frac{1}{2} |a_n - a_{n-1}| \left| 1 - \frac{2}{a_n a_{n-1}} \right|. \end{aligned}$$

Il suffit maintenant de montrer que $\left|1 - \frac{2}{a_n a_{n-1}}\right| \leq 1$. On voit que

$$\left| 1 - \frac{2}{a_n a_{n-1}} \right| \leq 1 \iff -1 \leq \frac{2}{a_n a_{n-1}} - 1 \leq 1 \iff 0 \leq \frac{2}{a_n a_{n-1}} \leq 2$$

et cette dernière inégalité est vraie, puisque $a_n a_{n-1} \geq 1$.

On conclut ainsi qu'on a bien $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2}|a_n - a_{n-1}|$. Par l'exercice 36, il suit que (a_n) est une suite de Cauchy, avec $\ell = \frac{1}{2}$.

c) Montrer que la limite de (a_n) n'est pas un nombre rationnel.

Morale : les suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ ne converge pas nécessairement dans $\mathbb{Q}$.

4. Autre

Exercice 39. Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble. Montrer que $x \in \mathbb{R}$ est un point limite de E si et seulement s'il existe une suite (a_n) dans $E \setminus \{x\}$ telle que $a_n \to x$ lorsque $n \to \infty$.

Remarque. Ceci justifie l'appellation « point limite ».

Exercice 40. Soit (a_n) une suite. On appelle $x \in \mathbb{R}$ un *point d'accumulation* de (a_n) s'il existe une sous-suite (a_{n_k}) telle que $a_{n_k} \to x$ lorsque $k \to \infty$.

a) Montrer que x est un point d'accumulation de (a_n) si et seulement si x est un point limite de $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

b) On suppose que (a_n) est bornée. Montrer alors que (a_n) possède un unique point d'accumulation si et seulement si elle converge.

Exercice 41. Propriétés des limites inférieures et supérieures. Soit (a_n) une suite. Montrer les propriétés suivantes de $\limsup$ et $\liminf$. (Voir l'exercice 14 au besoin.)

a) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$

b) $\limsup\limits_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$

c) $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

d) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

e) Les énoncés suivants sont équivalents :

i) $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$;

ii) il existe une sous-suite (a_{n_k}) telle que $a_{n_k} \to \infty$ lorsque $k \to \infty$;

iii) (a_n) n'est pas majorée.

Déduire l'analogue pour la limite inférieure.

f) Soit (a_{n_k}) une sous-suite de (a_n) qui converge vers L. Montrer que

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq L \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

g)† Il existe une sous-suite (a_{n_k}) telle que

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Déduire le résultat analogue pour le limite inférieure.

Suggestion. Vous pouvez construire une sous-suite à l'aide du principe du bon ordre et de la suite (b_n) de l'exercice 14.

h) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ si et seulement si $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

Suggestion. Pour la réciproque, les cas où la limite inférieure et la limite supérieure sont $\pm\infty$ sont déjà faits au c) et au d). Pour le cas où elles sont finies, utilisez l'exercice 29.

Solution. g) Les cas où (a_n) n'est pas majorée ou minorée sont déjà faits au e). Soit la suite (b_n) définie par

$$b_n = \sup_{m\geq n} a_m = \sup\{a_m \mid m \geq n\}.$$

comme dans l'exercice 14. Puisque (a_n) est bornée, par l'exercice 14, on sait que (b_n) est décroissante et minorée.

On considère l'ensemble $A_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n > b_1 - 1\}$. Cette ensemble est non vide, car sinon $b_1 - 1$ serait un majorant de $\{a_m \mid m \in \mathbb{N}\}$, ce qui est une contradiction, puisque b_1 est le supremum de cet ensemble. On pose $n_1 = \min A_1$, qui existe par le principe du bon ordre.

On suppose que $n_1 < \cdots < n_{k-1}$ sont définis. Pour définir n_k, pour $k \geq 2$, on pose $A_k = \left\{n \geq n_{k-1} + 1 \mid a_n > b_{n_{k-1}+1} - \frac{1}{k}\right\}$. Cet ensemble est non vide, autrement $b_{n_{k-1}+1} - \frac{1}{k}$

serait un majorant de $\{a_n \mid n \geq n_{k-1}+1\}$, ce qui est impossible, puisque $b_{n_{k-1}+1}$ est le supremum de cet ensemble. On pose $n_k = \min A_k$, qui existe par le principe du bon ordre. On a également $n_k > n_{k-1}$, car $n_k \in A_k$, ce qui implique que $n_k \geq n_{k-1}+1 > n_{k-1}$.

On obtient ainsi des nombres $1 \leq n_1 < n_2 < \cdots$. La sous-suite (a_{n_k}) est construite de sorte que $b_{n_k} - \frac{1}{k} < a_{n_k} \leq b_{n_k}$. Par l'exercice 14, on sait que (b_n) converge vers la limite supérieure de (a_n). Puisque (b_{n_k}) est une sous-suite de (b_n), elle converge vers la même limite. Par le théorème des deux gendarmes, on conclut que (a_{n_k}) converge vers la limite supérieure de (a_n).

h) $\Rightarrow$) Par le g), il existe deux sous-suites (a_{n_k}) et (a_{m_ℓ}) telles que a_{n_k} tend vers la limite supérieure et a_{m_ℓ}, vers la limite inférieure. Puisque toutes les sous-suites convergent vers L, on obtient la conclusion voulue.

$\Leftarrow$) Il y a deux cas à considérer : 1. L est un nombre fini ou 2. L est infinie.

On commence par 1. Par le e), (a_n) est bornée. Soit (a_{n_k}) une sous-suite de (a_n). Par le g), il existe une sous-sous-suite $\left(a_{n_{k_\ell}}\right)$ qui converge vers M, la limite supérieure de (a_{n_k}).

Par le f), puisque $\left(a_{n_{k_\ell}}\right)$ est une sous-suite de (a_n), on a

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq M \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Or, par hypothèse, les inégalités sont des égalités, donc on a $M = \liminf_{n\to\infty} a_n = L$.

Par l'exercice 29, puisque toutes les sous-suites de (a_n) possèdent une sous-sous-suite qui converge vers L, on conclut que (a_n) converge vers L.

Pour 2, cela découle du c) et du d).

Exercice 42. Pour $x \in [0,\infty)$, on définit l'ensemble

$$\begin{aligned} A_x &= \left\{ \sum_{m=0}^{n} \frac{x^n}{m!} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \\ &= \left\{ 1+x;\ 1+x+\frac{x^2}{2};\ 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6};\ 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24};\ \ldots \right\}. \end{aligned}$$

a) Montrer que pour tout $x \in [0,\infty)$, $1+x$ est un minorant de A_x.

b) Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $x < N$. Montrer que si $x \geq 0$, alors

$$M = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{N-1}}{(N-1)!} + \frac{x^N}{(N-x)(N-1)!}$$

est un majorant de A_x.
Suggestion. Inspirez vous de ce qui a été fait en classe dans le cas $x = 1$.

Solution. Si n est de la forme $n = N + k$, où $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, alors on a que

$$\begin{aligned}
\frac{x^n}{n!} &= \frac{x^N x^k}{n(n-1)\cdots N(N-1)\cdots 1} \\
&\leq \frac{x^N x^k}{N^{k+1}(N-1)\cdots 1} \qquad (*) \\
&= \frac{x^N}{N!}\frac{x^k}{N^k}.
\end{aligned}$$

Ensuite, on suppose que $n = N + k$, où $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ fixé. D'une part, on a

$$\sum_{m=0}^{n} \frac{x^m}{m!} = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{x^m}{m!} + \sum_{m=N}^{n} \frac{x^m}{m!}. \qquad (**)$$

On majore la deuxième somme. En utilisant l'inégalité $(*)$, on trouve

$$\begin{aligned}
\sum_{m=N}^{n} \frac{x^m}{m!} &\leq \sum_{\ell=0}^{k} \frac{x^N}{N!}\frac{x^\ell}{N^\ell} && \text{(par } (*)\text{, avec } m = N+\ell) \\
&= \frac{x^N}{N!} \sum_{\ell=0}^{k} \frac{x^\ell}{N^\ell} \\
&= \frac{x^N}{N!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{x}{N}\right)^{k+1}}{1 - \frac{x}{N}} \\
&\leq \frac{x^N}{N!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{N}} && (\text{car } \tfrac{x}{N} < 1) \\
&\leq \frac{x^N}{N!} \cdot \frac{N}{N-x} \\
&\leq \frac{x^N}{(N-1)!\,(N-x)}.
\end{aligned}$$

En utilisant cette inégalité dans $(**)$, on obtient

$$\sum_{m=0}^{n} \frac{x^m}{m!} \leq \sum_{m=0}^{N-1} \frac{x^m}{m!} + \frac{x^N}{(N-1)!\,(N-x)}$$

pour tout $n \geq N$, comme voulu. L'inégalité est vraie pour $n < N$ aussi, puisque

$$\sum_{m=0}^{n} \frac{x^m}{m!} \leq \sum_{m=0}^{N} \frac{x^m}{m!} \leq \sum_{m=0}^{N-1} \frac{x^m}{m!} + \frac{x^N}{(N-1)!\,(N-x)}.$$

On conclut que $\sum\limits_{m=0}^{N-1} \frac{x^m}{m!} + \frac{x^N}{(N-1)!\,(N-x)}$ est un majorant de A.

c) On définit $\exp(x) := \sup A_x$. Montrer que si $0 \leq x \leq y$, alors $1 \leq \exp(x) \leq \exp(y)$.

Solution. Si $0 \leq x \leq y$, alors il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{m=0}^{n} \frac{x^m}{m!} \leq \sum_{m=0}^{n} \frac{y^m}{m!},$$

puisque $x^m \leq y^m$. Ainsi, tout majorant de A_x est également un majorant de A_y. On conclut que $\sup A_x \leq \sup A_y$.

d) Soit (x_n) une suite telle que $x_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, on a que $\frac{\exp(x_n)}{x_n^k} \to \infty$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice 43†. Soit $x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!}\right) = 1.$$

Indication. Calculez quel devrait être le coefficient de x^k. Faites les cas k pair et k impair séparemment. Remarquez ensuite qu'il y a une ressemblance entre les coefficients trouvés et ceux de la formule du binôme de $(1-1)^k$.

Solution. Soit $k \in \mathbb{N}$ pair et tel que $k \leq n$. On a

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!}\right) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)\left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots \pm \frac{x^n}{n!}\right) \\ &= 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{2n} x^{2n},\end{aligned}$$

où a_k est le coefficient de x^k. On trouve, par exemple, $a_1 = 1 - 1 = 0$ et $a_2 = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0$. Le but est de montrer que $a_k = 0$ pour tout k.

Soit $1 \leq k \leq 2n$ un entier pair. Dans le produit, pour obtenir x^k, on doit multiplier x^ℓ avec $x^{k-\ell}$ pour $0 \leq \ell \leq k$. Ainsi, on trouve

$$\begin{aligned}a_k &= 1 \cdot \frac{1}{k!} + 1 \cdot \frac{-1}{(k-1)!} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{(k-2)!} + \cdots + \frac{1}{(k-1)!} \cdot (-1) + \frac{1}{k!} \cdot 1 \\ &= \sum_{\ell=0}^{k} \frac{(-1)^{n-\ell}}{\ell!(k-\ell)!} \\ &= \sum_{\ell=0}^{k} \frac{(-1)^{n-\ell}}{\ell!(k-\ell)!} \cdot \frac{k!}{k!} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} (-1)^{n-\ell}.\end{aligned}$$

Or, si on calcule $(1-1)^k$ avec la formule du binôme, on trouve

$$0 = (1-1)^k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} 1^k (-1)^{k-\ell}.$$

On conclut que $a_k = 0$.

Soit maintenant $1 \leq k \leq 2n$ un entier impair. On a

$$\begin{aligned} a_n &= 1 \cdot \frac{-1}{k!} + 1 \cdot \frac{1}{(k-1)!} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{-1}{(k-2)!} + \cdots + \frac{1}{(k-1)!} \cdot 1 + \frac{1}{k!} \cdot (-1) \\ &= \sum_{\ell=0}^{k} \frac{(-1)^{k-\ell}}{\ell!(k-\ell)!} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} (-1)^{n-\ell}. \end{aligned}$$

Par le même argument, on conclut que $a_k = 0$.

Il est clair que $a_0 = 1$. Comme $a_k = 0$ pour $k \in \{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$, on conclut que le produit du départ donne bien 1.

b) Pour $x \in (-\infty, 0)$, on définit* $\exp(x) := \frac{1}{\exp(-x)}$. Montrer que $\exp(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c) Soit (x_n) une suite telle que $x_n \to -\infty$ lorsque $n \to \infty$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, on a que $x_n^k \exp(x_n) \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

**Remarque*. Le a) motive la définition de $\exp(x)$ pour $x \leq 0$. En effet, si on avait définit $\exp(x)$ comme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, alors le a) se réécrit $\exp(x)\exp(-x) = 1$. Puisqu'on n'a pas encore vu les séries, on a utilisé le supremum à la place.

Exercice 44†. Représentation décimale. Soit $x \in [0, \infty)$. Le but de l'exercice est d'associer une représentation décimale à x. Pour $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, on pose

$$s_n := \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}, \qquad a_{n+1} := 10^{n+1}(s_{n+1} - s_n)$$

et $a_0 = s_0$.

a) Montrer que $a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ pour $n \geq 1$.

Solution. Par définition de a_n et de s_n, on a

$$a_{n+1} = 10^{n+1}(s_{n+1} - s_n) = \lfloor 10^{n+1} x \rfloor - 10 \lfloor 10^n x \rfloor.$$

On voit que a_n est un entier, puisqu'il est la différence de deux entiers. D'une part, on a

$$a_{n+1} > (10^{n+1} x - 1) - 10(10^n x) = -1$$

et d'autre part, on a
$$a_{n+1} < 10^{n+1}x - 10(10^n x - 1) = 10.$$
On a donc $-1 < a_{n+1} < 10$, mais puisque a_{n+1} est entier, cela est équivalent à $0 \leq a_{n+1} \leq 9$.

b) Montrer que s_n s'écrit de la form
$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k}.$$

Indice. Utilisez le principe de récurrence.

Solution. Par récurrence sur n, on a $s_0 = a_0$ par définition de a_0. Ensuite, on suppose que l'hypothèse de récurrence est vraie pour n et on montre qu'elle est vraie pour $n+1$. Par défintion de a_{n+1}, on a
$$a_{n+1} = 10^{n+1}(s_{n+1} - s_n)$$
et donc $10^{n+1}s_{n+1} = a_{n+1} + 10^{n+1}s_n$. Il suit que
$$s_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + s_n = \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{a_k}{10^k},$$
comme voulu.

c) Montrer que (s_n) est croissante et majorée par x. Déduire que (s_n) est convergente.

Solution. Il est clair que (s_n) est croissante en utilisant le c), puisque c'est une somme de termes positifs. Pour voir que'elle est majorée par x, il suffit d'utiliser le fait que $\lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x$. On a donc
$$s_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leq \frac{10^n x}{10^n} = x.$$

d) On définit une troisième suite : on pose
$$t_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}.$$

Montrer que (t_n) est décroissante et minorée par x.

Solution. On commence par montrer que (t_n) est décroissante. On a
$$\begin{aligned}
t_{n+1} - t_n \leq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad s_{n+1} + \frac{1}{10^{n+1}} - s_n - \frac{1}{10^n} \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^n}\left(\frac{1}{10} - 1\right) \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} \leq \frac{9}{10^{n+1}} \\
&\Leftrightarrow \quad a_{n+1} \leq 9.
\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est vraie, par le a). On conclut que la suite est décroissante.

Ensuite, vu que $10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1$, on a

$$t_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n} > \frac{10^n x}{10^n} = x.$$

e) Montrer que $t_n - s_n \to 0$ lorsque $n \to 0$.

Solution. On a que $t_n - s_n = \frac{1}{10^n}$ et on a vu en classe que $10^{-n} \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

f) Déduire que $s_n \to x$ et donc que

$$x = \sup \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}.$$

Solution. Par le c), la suite (s_n) converge puisqu'elle est croissante et majorée. Par le d), la suite (t_n) converge puisqu'elle est décroissante et minorée. De plus, (s_n) est majorée par x et (t_n) est minorée par x. On a donc $s_n \leq x \leq t_n$ et donc $0 \leq x - s_n \leq t_n - s_n$. Par le théorème des deux gendarmes, par le e), il suit que $s_n \to x$ lorsque $n \to \infty$.

Enfin, on a vu en classe que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sup \{ s_n \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \}$$

vu que (s_n) est croissante et majorée. Cela montre que

$$x = \sup \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\},$$

par le b).

Remarque. On sait que certains nombres ont plus d'une représentations décimales possibles. Cette façon de procéder en donne une, celle qui ne devient pas tôt ou tard une suite constante de 9. Par exemple, cette façon de procéder donne la représentation décimale 1 au nombre un et non 0,999999...