Analyse 1

Série 2

Suites

1. Convergence

Exercice 1. Trouver un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a :

a) $\left|\dfrac{2n}{2n+3} - 1\right| < \dfrac{1}{327}$ b) $\left|\dfrac{n^2-2}{3n^2+4} - \dfrac{1}{3}\right| < \dfrac{1}{826}$

Exercice 2. Pour chaque suite suivante, trouver un candidat $L \in \mathbb{R}$ et montrer que cette suite converge vers L en utilisant la définition de limite.

a) $a_n = \dfrac{5n+8}{2n+3}$ b) $a_n = \dfrac{n^2}{n^2+4}$ c) $a_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n-1}{n^2}$

Exercice 3. Déterminer si chacune des suites suivantes est bornée.

a) $a_n = (-1)^n n$ b) $a_n = 5^{1+(-1)^n}$ c) $a_n = \left(n + \dfrac{1}{n}\right)^2$

d) $a_n = \dfrac{3n^2+7}{6n^2+5}$ e) $a_n = (n+1)^2 - (n^2+2n)$

Exercice 4. a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$ est bornée et divergente.

b) La suite dont le terme général est $b_n = \frac{1}{2}\big(1 + (-1)^{n+1}\big)$ converge-t-elle?

Exercice 5. On définit les suites (a_n) et (b_n) par

$$a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \qquad \text{et} \qquad b_n = a_n + \frac{1}{2n+1}.$$

a) Montrer que (a_n) est croissante et que (b_n) est décroissante.

b) Montrer qu'elles convergent toutes les deux.
Indice. Remarquez que $\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1}$ est positif quelque soit $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 6. Soit (a_n) une suite. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

1. (a_n) converge;
2. pour tout $M \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la suite (a_{n+M}) converge;
3. il existe $M \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tel que la suite (a_{n+M}) converge.

Montrer dans ce cas que

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+M} = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Exercice 7. Soit $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite. Montrer que si (a_n) est décroissante à partir du rang $M \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ et est minorée, alors (a_n) converge et

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N},\ n \geq M\}.$$

Exercice 8. Soit (a_n) et (b_n) deux suites qui convergent vers L. Montrer que la suite

$$(c_n) = (a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots)$$

converge aussi vers L.

Exercice 9. Soit (a_n) et (b_n) deux suites telles que $a_n \geq 0$ et $b_n \geq 0$. On définit la suite (c_n) par

$$(c_n) = (a_1, -b_1, a_2, -b_2, a_3, -b_3, \cdots).$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur (a_n) et (b_n) qui permet de conclure que (c_n) converge.

Exercice 10. Soit (s_n) une suite. On pose

$$t_n = \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

a)† Montrer que si $s_n \to s$ lorsque $n \to \infty$, alors $t_n \to s$ lorsque $n \to \infty$.

b) Trouver une suite (s_n) qui diverge, mais pour laquelle (t_n) converge.

Exercice 11. Soit (a_n) une suite.

a) Montrer que si $a_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$, alors (a_n) est minorée. Déduire que si $a_n \to -\infty$ lorsque $n \to \infty$, alors (a_n) est majorée.

b) Si $|a_n| \to \infty$, a-t-on nécessairement que $a_n \to \infty$ ou $a_n \to -\infty$ lorsque $n \to \infty$?

Exercice 12. Pour chaque suite, déterminer si elle est bornée. Si elle n'est pas bornée, déterminer si elle tend vers ∞, vers $-\infty$ ou ni l'un ni l'autre.

a) $\left(\frac{2^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ b) $\left((-1)^n n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ c) $\left(\frac{n^2-\sqrt{n}}{\sqrt{1+n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 13. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers $+\infty$. Montrer qu'il existe un rang $K \in \mathbb{N}$ tel que la suite $\left(\frac{1}{a_{n+K-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
Attention! Assurez vous qu'il n'y a pas de division par zéro.

Exercice 14. Limite supérieure. Soit (a_n) une suite majorée. On définit la suite (b_n) par

$$b_n = \sup_{m\geq n} a_m := \sup\{a_m \mid m \in \mathbb{N},\ m \geq n\}. \tag{$*$}$$

a) Montrer que (b_n) est décroissante.

b) Montrer que si $a_n \not\to -\infty$, alors (b_n) est minorée. Conclure que la suite converge dans ce cas.

c) Montrer que si $a_n \to -\infty$, alors $b_n \to -\infty$ lorsque $n \to \infty$.

Définition. Dans les cas de b) et c), la suite (b_n) a une limite; on l'appelle *la limite supérieure de* a_n et on pose

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Si (a_n) n'est pas majorée, alors on pose $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n := \infty$. Dans tous les cas, la limite supérieure existe ou tend vers $\pm\infty$.

d) Montrer que si (a_n) est bornée, alors on a

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\geq 1} \sup_{m\geq n} a_m \tag{$**$}$$

où on utilise la notation $\inf\limits_{n\geq 1} c_n := \inf\{c_n \mid n \in \mathbb{N},\ n \geq 1\}$ et celle de $(*)$.

e) Donner une définition pour la limite inférieure de (a_n) en s'inspirant de a), b) et c). Montrer que cette limite existe ou qu'elle tend vers $\pm\infty$ et trouver une formule analogue à $(**)$.

2. Calcul de limites

Exercice 15. Soit (a_n) une suite telle que $a_n \geq 0$ pour tout n et qui converge vers $a \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{a}$.

Exercice 16. Calculer la limite des suites dont le terme général est donné par les expressions suivantes.

a) $\dfrac{n^3-1}{(n-1)(n^2+n+1)}$ b) $\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{500}$

c) $\dfrac{3n^2+7\sqrt{n}+3}{7n^2+2}$ d) $\dfrac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+12}}$

e) $\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}$ f) $\sqrt[n]{1+n+n^2}$

g) $\sqrt{n^2+n}-n$ h) $\dfrac{2^n}{n!}$

Exercice 17. Soit (a_n) et (b_n) deux suites.

a) Trouver un exemple de (a_n) et (b_n) bornées telles que $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ existe, mais (a_n) ou (b_n) divergent.

b) Si (a_nb_n) converge, alors (a_n) et (b_n) convergent-elles?

c) Si (a_nb_n) et (a_n+b_n) convergent, alors (a_n) et (b_n) convergent-elles?

Exercice 18. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $0 < y \leq x$. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^n+y^n} = x$.

Exercice 19. Calculer les limites suivantes, si elles existent.

a) $\sqrt[n]{1+\sqrt[n]{2^n+n}}$ b) $\sqrt[n]{n}-\sqrt[2n]{n}$ c) $a_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{2n-2}}$

Exercice 20. Soit (a_n) et (b_n) les suites de l'exercice 5. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Exercice 21. Calculer la limite de la suite définie par $c_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

Exercice 22. Soit la suite

$$a_n = \frac{1}{n!}+\frac{2!}{n!}+\frac{3!}{n!}+\cdots+\frac{(n-1)!}{n!}+1.$$

Calculer la limite de (a_n), si elle existe.

Exercice 23. Calculer la limite de la suite (a_n), dont le terme général est donné par

a) $a_n = \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$ b) $a_n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$ c)* $a_n = \left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$

d) $a_n = \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{3n}$ e) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$ f) $a_n = \left(1+\dfrac{m}{n}\right)^{kn}$ où $m, k \in \mathbb{N}$.

Suggestion pour le c). Considérez d'abord $(a_n)^n$.

Exercice 24. Pour quels valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la suite

$$s_n = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \cdots + \frac{x^n}{2^n}$$

converge-t-elle? Lorsqu'elle converge, déterminer la valeur de la limite.

Exercice 25. Soit E un ensemble non vide et majoré. Soit $S := \sup E$. Montrer qu'il existe une suite (a_n) dans E (c.-à-d. $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq E$) telle que $a_n \to S$ lorsque $n \to \infty$.

3. Sous-suites, suites de Cauchy et suites récurrentes

Exercice 26. Trouver une sous-suite convergente des suites suivantes, si possible.
a) $a_n = (-1)^n n$ b) $a_n = \left(\frac{1}{n} - 1\right)^n$ c) $a_n = \left\lfloor \frac{n}{2^n} \right\rfloor$

Exercice 27. Soit (a_n) une suite dont tous les termes sont positifs ou nuls. On pose $b_n = (-1)^n a_n + (-1)^{n+1}$. Quelle condition sur (a_n) est suffisante pour déterminer que (b_n) possède une sous-suite convergente?

Exercice 28. Soit la suite dont le terme général est $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$. Montrer par récurrence que $a_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$. Déduire que (a_n) diverge.

Exercice 29. Soit (a_n) une suite. Montrer que s'il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que pour toute sous-suite (a_{n_k}), il existe une sous-sous-suite $\left(a_{n_{k_\ell}}\right)$ qui converge vers L, alors $a_n \to L$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice 30. Soit $a_1 = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $a_{n+1} = \frac{2a_n+3}{6}$.

a) Montrer que (a_n) converge.
b) Calculer la limite.

Exercice 31. Soit $s_1 = \sqrt{2}$. On pose

$$s_{n+1} := \sqrt{2 + \sqrt{s_n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que (s_n) converge et que $s_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 32. Soit (a_n) la suite définie par $a_1 = 2$ et $a_{n+1} = 2a_n^2$ $(n \in \mathbb{N})$.

a) Montrer que si a_n converge vers L, alors soit $L = 0$ ou $L = \frac{1}{2}$.
b) La suite converge-t-elle?

Exercice 33. À l'aide de la définition, montrer que :

a) $a_n = \frac{n+2}{n}$ est une suite de Cauchy;
b) $a_n = (-1)^n$ n'est pas une suite de Cauchy.

Exercice 34. Soit (b_n) une suite telle que $b_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Soit (a_n) une autre suite. Montrer que si pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|a_{n+k} - a_n| \leq |b_n|,$$

alors (a_n) est une suite de Cauchy.

Exercice 35. Soit (a_n) et (b_n) deux suites telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$|a_{n+1} - a_n| \leq b_n.$$

a) Soit $s_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. On suppose que (s_n) converge. Montrer que (a_n) est une suite de Cauchy.

b) Si on a plutôt que $b_n \to 0$, alors (a_n) est-elle une suite de Cauchy?

Exercice 36. Soit (a_n) une suite. On suppose qu'il existe $\ell \in (0, \infty)$ tel que pour tout $n \geq 2$, on ait

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \ell |a_n - a_{n-1}|.$$

a) Montrer que $|a_{n+1} - a_n| \leq \ell^{n-1} |a_2 - a_1|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$|a_{n+k} - a_n| \leq |a_2 - a_1| \ell^{n-1} \frac{1 - \ell^k}{1 - \ell}.$$

c) Montrer que si $\ell < 1$, alors (a_n) est une suite de Cauchy.

Exercice 37. Soit (a_n) la suite définie par

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n^3 + a_n^2, & \text{si } n \geq 2; \\ a_1 = -\frac{1}{8}. \end{cases}$$

a) Montrer que $|a_n| \leq \frac{1}{4}$ pour tout n.

b) Montrer que $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{11}{16} |a_n - a_{n-1}|$.

c) Conclure que a_n est une suite de Cauchy. Quelle est la limite?

Exercice 38. On pose $a_1 = 2$ et $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que a_n est un nombre rationnel pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2}|a_n - a_{n-1}|$ pour tout entier $n \geq 2$. Déduire que (a_n) est Cauchy.
Indice. Montrez d'abord que $1 \leq a_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Montrer que la limite de (a_n) n'est pas un nombre rationnel.

Morale : les suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ ne converge pas nécessairement dans $\mathbb{Q}$.

4. Autre

Exercice 39. Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble. Montrer que $x \in \mathbb{R}$ est un point limite de E si et seulement s'il existe une suite (a_n) dans $E \setminus \{x\}$ telle que $a_n \to x$ lorsque $n \to \infty$.

Remarque. Ceci justifie l'appellation « point limite ».

Exercice 40. Soit (a_n) une suite. On appelle $x \in \mathbb{R}$ un *point d'accumulation* de (a_n) s'il existe une sous-suite (a_{n_k}) telle que $a_{n_k} \to x$ lorsque $k \to \infty$.

a) Montrer que x est un point d'accumulation de (a_n) si et seulement si x est un point limite de $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

b) On suppose que (a_n) est bornée. Montrer alors que (a_n) possède un unique point d'accumulation si et seulement si elle converge.

Exercice 41. Propriétés des limites inférieures et supérieures. Soit (a_n) une suite. Montrer les propriétés suivantes de lim sup et lim inf. (Voir l'exercice 14 au besoin.)

a) $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$

b) $\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n$

c) $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

d) $\liminf_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

e) Les énoncés suivants sont équivalents :

i) $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$;

ii) il existe une sous-suite (a_{n_k}) telle que $a_{n_k} \to \infty$ lorsque $k \to \infty$;

iii) (a_n) n'est pas majorée.

Déduire l'analogue pour la limite inférieure.

f) Soit (a_{n_k}) une sous-suite de (a_n) qui converge vers L. Montrer que

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq L \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

g)† Il existe une sous-suite (a_{n_k}) telle que

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Déduire le résultat analogue pour le limite inférieure.

Suggestion. Vous pouvez construire une sous-suite à l'aide du principe du bon ordre et de la suite (b_n) de l'exercice 14.

h) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ si et seulement si $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

Suggestion. Pour la réciproque, les cas où la limite inférieure et la limite supérieure sont $\pm\infty$ sont déjà faits au c) et au d). Pour le cas où elles sont finies, utilisez l'exercice 29.

Exercice 42. Pour $x \in [0, \infty)$, on définit l'ensemble

$$\begin{aligned} A_x &= \left\{ \sum_{m=0}^{n} \frac{x^n}{m!} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \\ &= \left\{ 1 + x;\; 1 + x + \frac{x^2}{2};\; 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6};\; 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24};\; \ldots \right\}. \end{aligned}$$

a) Montrer que pour tout $x \in [0, \infty)$, $1 + x$ est un minorant de A_x.

b) Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $x < N$. Montrer que si $x \geq 0$, alors

$$M = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{N-1}}{(N-1)!} + \frac{x^N}{(N-x)(N-1)!}$$

est un majorant de A_x.
Suggestion. Inspirez vous de ce qui a été fait en classe dans le cas $x = 1$.

c) On définit $\exp(x) := \sup A_x$. Montrer que si $0 \leq x \leq y$, alors $1 \leq \exp(x) \leq \exp(y)$.

d) Soit (x_n) une suite telle que $x_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, on a que $\frac{\exp(x_n)}{x_n^k} \to \infty$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice 43†. Soit $x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right) \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!} \right) = 1.$$

Indication. Calculez quel devrait être le coefficient de x^k. Faites les cas k pair et k impair séparemment. Remarquez ensuite qu'il y a une ressemblance entre les coefficients trouvés et ceux de la formule du binôme de $(1-1)^k$.

b) Pour $x \in (-\infty, 0)$, on définit* $\exp(x) := \frac{1}{\exp(-x)}$. Montrer que $\exp(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c) Soit (x_n) une suite telle que $x_n \to -\infty$ lorsque $n \to \infty$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, on a que $x_n^k \exp(x_n) \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

**Remarque*. Le a) motive la définition de $\exp(x)$ pour $x \leq 0$. En effet, si on avait définit $\exp(x)$ comme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, alors le a) se réécrit $\exp(x)\exp(-x) = 1$. Puisqu'on n'a pas encore vu les séries, on a utilisé le supremum à la place.

Exercice 44†. Représentation décimale. Soit $x \in [0, \infty)$. Le but de l'exercice est d'associer une représentation décimale à x. Pour $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, on pose

$$s_n := \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}, \qquad a_{n+1} := 10^{n+1}(s_{n+1} - s_n)$$

et $a_0 = s_0$.

a) Montrer que $a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ pour $n \geq 1$.

b) Montrer que s_n s'écrit de la form

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k}.$$

Indice. Utilisez le principe de récurrence.

c) Montrer que (s_n) est croissante et majorée par x. Déduire que (s_n) est convergente.

d) On définit une troisième suite : on pose

$$t_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}.$$

Montrer que (t_n) est décroissante et minorée par x.

e) Montrer que $t_n - s_n \to 0$ lorsque $n \to 0$.

f) Déduire que $s_n \to x$ et donc que

$$x = \sup \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}.$$

Remarque. On sait que certains nombres ont plus d'une représentations décimales possibles. Cette façon de procéder en donne une, celle qui ne devient pas tôt ou tard une suite constante de 9. Par exemple, cette façon de procéder donne la représentation décimale 1 au nombre un et non 0,999999...