

Analyse 1

Série 0

Notions de base

Les notions de cette série sont vues dans le cours MAT1500 — Mathématiques discrètes. Puisque le cours n'est pas préalable, il est possible que vous ne puissiez pas faire tous les exercices. Voyez cette série comme une jauge : plus vous aurez de la difficulté avec cette série, plus vous pouvez vous attendre à avoir de la difficulté avec le cours.

Notation. Pour le cours, l'ensemble des naturels \mathbb{N} ne contient pas 0. Ainsi, on écrit

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

On écrira $\mathbb{N} \cup \{0\}$ si l'on inclut 0.

Exercice 1. Soit A, B deux ensembles non vides.

- Donner la définition de ce qu'est une fonction $f: A \rightarrow B$.
- Quel est le domaine et le codomaine de f ?
- Quel est la différence entre le codomaine et l'image de f ?

Exercice 2. a) Donner la définition d'une fonction injective.

- b) Déterminer quelles fonctions parmi les suivantes sont injectives :

$i) f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 2, 4, 6\}$	$ii) f: \{a, b, c, d\} \rightarrow \{0, 1\}$	$iii) f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$
$n \mapsto 2n$	$a \mapsto 0$	$n \mapsto n$
	$b \mapsto 1$	
	$c \mapsto 0$	
	$d \mapsto 1$	

Exercice 3. a) Donner la définition d'une fonction surjective.

- b) Déterminer quelles fonctions du 2b) sont surjectives.

Exercice 4. Soit $A = \{0, 1, 2\}$ et $B = \{a, b\}$.

- Compter le nombre de fonctions injectives $f: A \rightarrow B$ possibles.
- Compter le nombre de fonctions surjectives $f: A \rightarrow B$ possibles.

Exercice 5. a) Donner la définition d'une fonction bijective.

- b) Donner deux exemples de fonctions qui soient bijectives.

Exercice 6. Soit A et B deux ensembles non vides.

- a) Montrer qu'une fonction $f: A \rightarrow B$ est injective si et seulement si elle possède un inverse à gauche.
- b) Montrer qu'une fonction $g: A \rightarrow B$ est surjective si et seulement si elle possède un inverse à droite.
- c) Dédurre qu'une fonction $h: A \rightarrow B$ est bijective si et seulement si elle possède un inverse.

Exercice 7. Soit $a, b \in \mathbb{N}$ deux nombres.

- a) Donner la définition du plus grand commun diviseur de a, b . On le note $\text{pgcd}(a, b)$.
- b) Expliquer l'algorithme d'Euclide pour calculer le plus grand commun diviseur.
- c) Calculer $\text{pgcd}(38, 90)$.
- d) Montrer que $\frac{a}{\text{pgcd}(a,b)}$ et $\frac{b}{\text{pgcd}(a,b)}$ sont des entiers.
- e) On pose $m := \frac{ab}{\text{pgcd}(a,b)}$. Soit $x \in \mathbb{Z}$ un entier tel que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{x}{m}.$$

Déterminer x en fonction de a, b et $\text{pgcd}(a, b)$.

Exercice 8. Soit A, B deux ensembles non vides, $A_1, A_2 \subseteq A$ et $B_1, B_2 \subseteq B$ des sous-ensembles et soit $f: A \rightarrow B$ une fonction. On rappelle que la *préimage* ou l'*image réciproque* est de B_1 par f est

$$f^{-1}(B_1) = \{a \in A \mid f(a) \in B_1\}.$$

L'*image direct* ou simplement l'*image* de A_1 par f est

$$f(A_1) = \{f(a) \in B \mid a \in A_1\}.$$

Montrer les égalités ou les inclusions d'ensembles suivants.

- a) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
- b) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
- c) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$
- d) $f^{-1}(B_1^c) = f^{-1}(B_1)^c$ pour tout $B_1 \subseteq B$ (Ici, le c est signifie le complément. On a $B_1^c = B \setminus B_1$ et $f^{-1}(B_1)^c = A \setminus f^{-1}(B_1)$.)
- e) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
- f) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$
- g) $f(A_1 \setminus A_2) \supseteq f(A_1) \setminus f(A_2)$
- h) si f est injective, alors il y a égalité au f)

- i) si pour tout $A_1, A_2 \subseteq X$, on a $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$, alors f est injective
- j) si f est injective, alors il y a égalité au g)
- k) si pour tout $A_1, A_2 \subseteq X$, on a $f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2)$, alors f est injective.

Exercice 9. Soit A et B deux ensembles non vides, $A_1, A_2 \subseteq A$ deux sous-ensembles et $f: A \rightarrow B$ une fonction. Soit $b \in f(A_1 \setminus A_2)$. Par définition, il existe $a \in A_1 \setminus A_2$ tel que $f(a) = b$. Il suit que $a \in A_1$ et que $a \notin A_2$ et donc $f(a) \in f(A_1)$ et $f(a) \notin f(A_2)$. D'où on a $b = f(a) \in f(A_1) \setminus f(A_2)$. Puisque $b \in f(A_1 \setminus A_2)$ était quelconque, on conclut que $f(A_1 \setminus A_2) \subseteq f(A_1) \setminus f(A_2)$.

Où est l'erreur dans ce raisonnement?

Exercice 10. Soit X, Y des ensembles non vides et soit $f: X \rightarrow Y$.

- a) Est-ce que $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ pour tout $B \in Y$?
- b) Est-ce que $f(f^{-1}(B)) \supseteq B$ pour tout $B \in Y$?
- c) Est-ce que $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$ pour tout $A \in X$?
- d) Est-ce que $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ pour tout $A \in X$?
- e) Pour les énoncés dont la réponse est non, quelle condition sur f est nécessaire et suffisante afin que la réponse devienne oui?

Remarque. Pour ce genre d'exercice, il est sous-entendu que si la réponse est oui, alors il faut le démontrer et si la réponse est non, alors il faut trouver un contre-exemple.