Analyse 1

Devoir 2

Séries, continuité, dérivée

Vous pouvez utiliser les résultats et les exercices des chapitres 3 et 4 et de la section 5.1. Si vous utilisez un résultat, indiquez d'où il provient (p.ex. « par un théorème du chapitre 4 » ou « par l'exercice 24 de la série 3 »).

Le devoir est à remettre lundi le 25 juillet au début du cours en papier. Je n'accepte pas les devoirs remis par courriel, sauf en situation exceptionnelle.

Propreté.

1. Si vous tapez votre devoir, vous pouvez l'imprimer recto-verso.
2. Si vous écrivez votre devoir à la main (sur papier ou sur une tablette), vous devez :
   - écrire à double-interligne;
   - écrire recto seulement;
   - écrire sur du papier blanc ou ligné (mais pas quadrillé!);
   - écrire *très* propre et *lisiblement*.

   Si l'un de ces critères n'est pas rempli, vous aurez une journée pour le réécrire en suivant les consignes et vous perdrez des points de retard (1 point par jour).

Question 1. (2pts) Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente et soit (b_n) est une suite convergente. La série $\sum(b_n a_n)$ est-elle absolument convergente? Si oui, le démontrer; sinon, donner une contre-exemple.

Question 2. (4pts) Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $f\colon [a,\infty) \to [0,\infty)$ une fonction continue et à valeurs positives. Montrer que si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, alors f est majorée sur $[a,\infty)$ et f atteint son maximum sur $[a,\infty)$.

Question 3. (4pts) Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1) = 0$. On suppose que f est dérivable en 0 et en 1 avec $f'(0) = 0$ et $f'(1) = 2$. Montrer que f intersecte la parabole $p(x) = x^2 - x$ au moins trois fois dans l'intervalle $[0,1]$.
Indice. Considérez la fonction $h(x) = \frac{f(x)}{x^2-x}$.