Analyse 1

Devoir 1

Nombres réels et suites (solutionnaire)

Vous pouvez utiliser les résultats et les exercices des chapitres 1 et 2 seulement. Si vous utilisez un résultat, indiquez d'où il provient (p.ex. « par un théorème du chapitre 1 » ou « par l'exercice 42 de la série 2 »).

Le devoir est à remettre lundi le 11 juillet au début du cours en papier. Je n'accepte pas les devoirs remis par courriel, sauf en situation exceptionnelle.

Propreté.

1. Si vous tapez votre devoir, vous pouvez l'imprimer recto-verso.
2. Si vous écrivez votre devoir à la main (sur papier ou sur une tablette), vous devez :
   - écrire à double-interligne;
   - écrire recto seulement;
   - écrire sur du papier blanc ou ligné (mais pas quadrillé!);
   - écrire *très* propre et *lisiblement*.

   Si l'un de ces critères n'est pas rempli, vous aurez une journée pour le réécrire en suivant les consignes et vous perdrez des points de retard (1 point par jour).

Question 1. (6pts) Soit $b > 1$. Pour $x \geq 0$, on définit

$$b^x = \sup\{b^r \mid r \in \mathbb{Q} \text{ et } 0 \leq r < x\}. \tag{$*$}$$

On tient pour acquis que si x est rationnel, alors $(*)$ coïncide avec la définition de b^x donnée dans le cours, et donc $b^{p+q} = b^p b^q$ pour tout $p, q \in \mathbb{Q}$. De plus, on accepte sans démonstration que pour tout $x, z \in \mathbb{R}$, si $0 \leq x < z$, alors $1 \leq b^x < b^z$.

Soit $y \in (1, \infty)$.

a) On pose $E_y := \{z \in [0, \infty) \mid b^z \leq y\}$. Montrer que E_y est majoré et déduire que $x := \sup E_y$ est bien défini. Montrer que $x \geq 0$.

b) Montrer que si $p \in \mathbb{Q}$ est tel que $0 \leq p < x$, alors $p \in E_y$. Déduire que $b^x \leq y$.

c) Montrer que $b^x \geq y$.
Indice. Supposez le contraire. Il existe donc $\varepsilon > 1$ tel que $\varepsilon b^x = y$. Montrez qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt[N]{b} < \varepsilon$. Ensuite, considérez un rationnel q tel que $q < x < q + \frac{1}{N}$.

Remarque. Par le b) et c), on a $b^x = y$. On appelle x le *logarithme en base b de y*.

Solution. a) On montre que E_y est majoré. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $b^n = (1+(b-1))^n \geq 1+(b-1)n$ par l'inégalité de Bernoulliet donc $b^n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$. Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, alors $b^n > y$. Or, si $z \geq N$, alors $b^z \geq b^N > y$ et donc $z \notin E_y$. Il suit que N est un majorant de E_y.

Ensuite, E_y est non vide, car $0 \in E_y$ quelque soit $y \in (1, \infty)$. En effet, on sait que $b^0 = 1 \leq y$. Par l'axiome de complétude, le supremum de E_y existe, donc x est bien défini.

Enfin, puisque $0 \in E_y$ et que x est un majorant de E_y, on a nécessairement $0 \leq x$.

b) Soit $p \in \mathbb{Q}$ tel que $0 \leq p < x$. Puisque $x = \sup E_y$, il existe $q \in E_y$ tel que $p \leq q \leq \sup E_y$. Par définition de E_y, on a $b^q \leq y$ et vu que $p \leq q$, on a $b^p \leq b^q \leq y$, d'où $p \in E_y$. Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{Q}$ tel que $0 \leq p < x$, on a $b^p \leq y$. Il suit que y est un majorant de $\{b^r \mid r \in \mathbb{Q} \text{ et } 0 \leq r \leq x\}$. Puisque b^x est le supremum de cet ensemble, on conclut que $b^x \leq y$.

c) On suppose le contraire, c'est-à-dire que $b^x < y$. Ainsi, il existe $\varepsilon > 1$ tel que $\varepsilon b^x = y$. Puisque $\sqrt[n]{b} \to 1$ lorsque $n \to \infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt[N]{b} < \varepsilon$. Ensuite, par densité des rationnels dans les réels, il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $x - \frac{1}{N} < q < x$. On a donc

$$q < x < q + \frac{1}{N} \quad \Rightarrow \quad b^q < b^x < b^{q+\frac{1}{N}}$$

et également

$$b^{q+\frac{1}{N}} = b^{\frac{1}{N}} b^q < \varepsilon b^q < \varepsilon b^x = y.$$

Il en découle que $b^{q+\frac{1}{N}} < y$, d'où $q + \frac{1}{N} \in E_y$. Or, x est le supremum de E_y, donc on a $q + \frac{1}{N} \leq x$, ce qui est une contradiction. On conclut que $y \leq b^x$.

Question 2. (4pts) Soit (a_n) une suite. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n, m \geq N$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $|a_n - a_m| \leq \frac{1}{k} + \frac{k}{m}$. Montrer que (a_n) est une suite de Cauchy.

Solution. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\frac{1}{k} \to 0$ lorsque $k \to \infty$, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{K} < \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, pour $n, m \geq N$, on obtient

$$|a_n - a_m| \leq \frac{1}{K} + \frac{K}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{K}{m}.$$

Puisque $\frac{K}{m} \to 0$ lorsque $m \to \infty$, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que si $m \geq M$, alors $\frac{K}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, si $m, n \geq \max\{N, M\}$, on obtient

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{K}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

D'où (a_n) est Cauchy.

Bonus. (+4 points sur l'intra) Soit $a_{m,n} := \left(1 + \frac{1}{m}\right)^n$ une suite, où $n, m \in \mathbb{N}$. A-t-on

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} a_{m,n} = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} a_{m,n} \ ?$$

Solution. Non. D'une part, on a

$$\lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^n = (1+0)^n = 1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il suit que $\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} a_{m,n}$ existe et vaut 1.

D'autre part, par l'inégalité de Bernoulli, on voit que

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{m}.$$

Si laisse $n \to \infty$, on obtient que $a_{m,n} \to \infty$, donc $\lim_{n\to\infty} a_{m,n}$ n'existe pas. Il suit que $\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} a_{m,n}$ n'existe pas non plus.