Analyse 1

Devoir 1

Nombres réels et suites

Vous pouvez utiliser les résultats et les exercices des chapitres 1 et 2 seulement. Si vous utilisez un résultat, indiquez d'où il provient (p.ex. « par un théorème du chapitre 1 » ou « par l'exercice 42 de la série 2 »).

Le devoir est à remettre lundi le 11 juillet au début du cours en papier. Je n'accepte pas les devoirs remis par courriel, sauf en situation exceptionnelle.

Propreté.

1. Si vous tapez votre devoir, vous pouvez l'imprimer recto-verso.
2. Si vous écrivez votre devoir à la main (sur papier ou sur une tablette), vous devez :
   - écrire à double-interligne;
   - écrire recto seulement;
   - écrire sur du papier blanc ou ligné (mais pas quadrillé!);
   - écrire *très* propre et *lisiblement*.

   Si l'un de ces critères n'est pas rempli, vous aurez une journée pour le réécrire en suivant les consignes et vous perdrez des points de retard (1 point par jour).

Question 1. (6pts) Soit $b > 1$. Pour $x \geq 0$, on définit

$$b^x = \sup\{b^r \mid r \in \mathbb{Q} \text{ et } 0 \leq r < x\}. \tag{$*$}$$

On tient pour acquis que si x est rationnel, alors $(*)$ coïncide avec la définition de b^x donnée dans le cours, et donc $b^{p+q} = b^p b^q$ pour tout $p, q \in \mathbb{Q}$. De plus, on accepte sans démonstration que pour tout $x, z \in \mathbb{R}$, si $0 \leq x < z$, alors $1 \leq b^x < b^z$.

Soit $y \in (1, \infty)$.

a) On pose $E_y := \{z \in [0, \infty) \mid b^z \leq y\}$. Montrer que E_y est majoré et déduire que $x := \sup E_y$ est bien défini. Montrer que $x \geq 0$.

b) Montrer que si $p \in \mathbb{Q}$ est tel que $0 \leq p < x$, alors $p \in E_y$. Déduire que $b^x \leq y$.

c) Montrer que $b^x \geq y$.
Indice. Supposez le contraire. Il existe donc $\varepsilon > 1$ tel que $\varepsilon b^x = y$. Montrez qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt[N]{b} < \varepsilon$. Ensuite, considérez un rationnel q tel que $q < x < q + \frac{1}{N}$.

Remarque. Par le b) et c), on a $b^x = y$. On appelle x le *logarithme en base b de y*.

Question 2. (4pts) Soit (a_n) une suite. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n, m \geq N$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $|a_n - a_m| \leq \frac{1}{k} + \frac{k}{m}$. Montrer que (a_n) est une suite de Cauchy.

Bonus. (+4 points sur l'intra) Soit $a_{m,n} := \left(1 + \frac{1}{m}\right)^n$ une suite, où $n, m \in \mathbb{N}$. A-t-on

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} a_{m,n} = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} a_{m,n} \text{ ?}$$