

Analyse appliquée

Noyaux

Exercice 1. Soit (a_n) une suite et $c_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k$, la moyenne de Cesàro de (a_n) .

- a) Montrer que si $a_n \in \mathbb{C}$ et si $a_n \rightarrow L \in \mathbb{C}$, alors $c_n \rightarrow L$.
- b) Montrer que si $a_n \in \mathbb{R}$ et si $a_n \rightarrow \pm\infty$ alors $c_n \rightarrow \pm\infty$.

Exercice 2. Montrer que si $a_n - a_{n-1} \rightarrow L$, alors $\frac{a_n}{n} \rightarrow L$.

Exercice 3. Calculer la limite de la moyenne de Cesàro de $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$.

Exercice 4. (Noyau de Dirichlet) Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$D_k(x) = \sum_{n=-k}^k e^{inx} = 1 + 2 \sum_{n=1}^k \cos(nx).$$

On l'appelle le *noyau de Dirichlet*. Montrer les propriétés suivantes.

- a) D_k est paire ($D_k(-x) = D_k(x)$).
- b) D_k est périodique de période 2π .
- c) $\int_0^\pi D_k = \int_{-\pi}^0 D_x = \pi$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- d) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\pi m \mid m \in \mathbb{Z}\}$, on a

$$D_k(x) = \frac{\sin((k + \frac{1}{2})x)}{\sin(x/2)} = \frac{e^{i(k+\frac{1}{2})x} - e^{-i(k+\frac{1}{2})x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}}.$$

- e) Pour toute fonction f intégrable,

$$SF_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt.$$

Si, de plus, f est 2π -périodique, alors

$$SF_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt.$$

Exercice 5. (Noyau de Fejér) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $K_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \sum_{m=-k}^k e^{imx}.$$

On l'appelle le *noyau de Fejér*. Montrer les propriétés suivantes.

- a) K_n est 2π -périodique, paire et positive.
- b) $K_n(x) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin((\frac{k+1}{2})x)}{\sin(x/2)} \right)^2$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\pi m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.
- c) $\int_0^\pi K_n = \int_{-\pi}^0 K_n = \pi$
- d) Pour tout $\varepsilon > 0$, $K_n \rightarrow 0$ uniformément lorsque $n \rightarrow \infty$ sur $[-\pi, \pi] \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)$.
- e) Pour toute fonction f intégrable,

$$\sigma_n(f)(x) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi f(t) K_n(x-t) dt.$$

Si, de plus, f est 2π -périodique, alors

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x-t) K_n(t) dt.$$

Exercice 6. (Noyau de Poisson) Soit $0 \leq r < 1$ fixé. On pose

$$P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta}.$$

Montrer les propriétés suivantes.

- a) P_r est bien définie pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et est 2π -périodique.
- b) $P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r \cos \theta + r^2}$
- c) Pour toute f intégrable, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) r^{|n|} e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi f(t) P_r(x-t) dt$

Remarque. Le noyau de Poisson ne sera pas utilisé dans le cours. Il est très important pour les fonctions harmoniques (théorie du potentielle) et le c) montre qu'il est relié aux coefficients de Fourier.