

Analyse appliquée

Convergence simple, uniforme, en norme

Exercice 1. Calculer la limite simple des suites suivantes.

$$\text{a) } f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(nx)}{nx}, & \text{si } x \neq 0, \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad \text{b) } f_n(x) = x^n e^{-nx}, \quad x \in [1, \infty)$$

$$\text{c) } f_n(x) = \tan\left(\frac{x}{n}\right)$$

Solution. a) Pour $x \neq 0$, on a

$$\left| \frac{\sin(nx)}{nx} \right| \leq \frac{1}{n|x|},$$

donc la suite tend vers 0. Pour $x = 0$, la suite vaut 1 pour tout n . On a donc $f_n \rightarrow f$ simplement sur $\mathbb{R}$, où

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 2. Montrer que

$$\int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{(2n-1)(2n+1)} dx \right) = 0.$$

Solution. Pour chaque n , on a

$$\left| \frac{\cos(2nx)}{(2n-1)(2n+1)} \right| \leq \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

On pose donc $M_n = \frac{1}{(2n-1)^2}$. Par le critère de Weierstrass, puisque la série $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, la série de départ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Puisque $\int_0^\pi \cos(2nx) dx = 0$. On conclut que

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{(2n-1)(2n+1)} dx \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\pi \frac{\cos(2nx)}{(2n-1)(2n+1)} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0. \end{aligned}$$

Exercice 3. a) Montrer que $\|f\|_2 \leq C\|f\|_\infty$ sur $[a, b]$, où C est une constante. Identifier C par rapport à a et b .

- b) Montrer que $\|f\|_1 \leq D\|f\|_2$ sur $[a, b]$, où D est une constante. Identifier D par rapport à a et b .

Indice. Vous pouvez vous sauver un peu de travail en faisant appel à une inégalité dans les exercices de la semaine 2.

- c) Montrer que si $f_n \rightarrow f$ uniformément, alors $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$ et $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Solution. a) On a

$$\|f\|_2^2 = \int_a^b |f|^2 \leq \int_a^b \|f\|_\infty^2 = \|f\|_\infty^2 (b-a).$$

Il suit que $\|f\|_2 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_\infty$. On peut donc prendre la constante $C = \sqrt{b-a}$. C'est la meilleure constante possible, puisqu'avec $f \equiv 1$, on trouve $\|1\|_2 = \sqrt{b-a}$ et $\|1\|_\infty = 1$ et donc $\|1\|_2 = \sqrt{b-a}\|1\|_\infty$.

- b) Selon l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\|f\|_1 = \langle |f|, 1 \rangle \leq \|f\|_2 \|1\|_2 = \sqrt{b-a}\|f\|_2.$$

Encore une fois, $D = \sqrt{b-a}$ est la meilleure constante possible, puisqu'on a égalité avec $f \equiv 1$.

- c) On sait que $f_n \rightarrow f$ uniformément ssi $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ (il suffit de regarder à la définition de la convergence uniforme et à la définition de $\|f\|_\infty$).

En combinant les parties a) et b), on a

$$\|f - f_n\|_1 \leq \sqrt{b-a}\|f - f_n\|_2 \leq (b-a)\|f - f_n\|_\infty.$$

Ainsi, si $\|f - f_n\|_\infty \rightarrow 0$, alors il suit que $\|f - f_n\|_2 \rightarrow 0$ et $\|f - f_n\|_1 \rightarrow 0$.

Exercice 4. En classe, on a montré que les fonctions continues sur $[a, b]$ sont denses parmi les fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$, selon $\|\cdot\|_2$ (c'est-à-dire si f est continue par morceaux, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe g continue telle que $\|f - g\|_2 < \varepsilon$). Montrer que c'est également le cas selon $\|\cdot\|_1$ sur $[a, b]$.

Solution. Il suffit de faire appel à l'exercice précédent.

Soit $\varepsilon > 0$. Par le résultat vu en classe, il existe g telle que $\|f - g\|_2 < \frac{\varepsilon}{\sqrt{b-a}}$. Par l'exercice précédent, on a

$$\|f - g\|_1 \leq \sqrt{b-a}\|f - g\|_2 < \sqrt{b-a} \frac{\varepsilon}{\sqrt{b-a}} = \varepsilon.$$

Exercice 5. (Lemme de Riemann-Lebesgue) Soit $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction.

- a) Montrer que si f est de classe C^1 , c'est-à-dire que f est dérivable sur $[-\pi, \pi]$ et f' est continue sur $[-\pi, \pi]$, alors

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{i\lambda x} dx = 0. \quad (*)$$

Indice. Intégrez par parties.

- b) Soit $g: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Montrer que g vérifie $(*)$ en utilisant le a) et le théorème d'approximation de Weierstrass : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme p tel que $\|p - g\|_{\infty} < \varepsilon$.
- c) Soit $h: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux. Montrer que h vérifie $(*)$ en utilisant le b) et la propriété de *densité* des fonctions continues parmi les fonctions continues par morceaux (voir exercice 4).
- d) (Optionnel) Soit $k: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction Riemann-intégrable sur $[-\pi, \pi]$. Montrer que k vérifie $(*)$ en utilisant le b) et l'exercice 6.

Solution. a) On a

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{i\lambda x} dx = \frac{f(x) e^{i\lambda x}}{i\lambda} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{i\lambda} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{i\lambda x} dx.$$

Comme f et f' sont continues sur $[-\pi, \pi]$, elles sont bornées, disons par M et M' respectivement. On a donc

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{i\lambda x} dx \right| \leq \frac{2M}{i\lambda} + \frac{1}{\lambda} 2\pi M' \rightarrow 0$$

lorsque $\lambda \rightarrow \infty$.

- b) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe p un polynôme telle que $\|p - g\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{4\pi}$. Remarquons que $(*)$ est vérifiée par p , puisque que p est de classe C^1 . Ainsi, il existe $\Lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\lambda > \Lambda$, on a $\left| \int_{-\pi}^{\pi} p(x) e^{i\lambda x} dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

En combinant, on trouve, pour tout $\lambda > \Lambda$,

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{i\lambda x} dx \right| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} ([g(x) - p(x)] + p(x)) e^{i\lambda x} dx \right| \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - p(x)| dx + \left| \int_{-\pi}^{\pi} p(x) e^{i\lambda x} dx \right| \\ &\leq 2\pi \frac{\varepsilon}{4\pi} + \left| \int_{-\pi}^{\pi} p(x) e^{i\lambda x} dx \right| \quad (\text{car } |g - p| < \frac{\varepsilon}{2\pi}) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{car } p \text{ vérifie } (*) \text{ et } \lambda > \Lambda) \end{aligned}$$

D'où $\int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{i\lambda x} dx \rightarrow 0$ lorsque $\lambda \rightarrow \infty$.

- c) La démarche est très similaire au b). Soit $\varepsilon > 0$. il existe f continue sur $[-\pi, \pi]$ telle que $\|f - h\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. De plus, comme f est continue, par le b), elle vérifie $(*)$, donc il existe $\Lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\lambda > \Lambda$, on a $\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{i\lambda x} dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

En combinant, on obtient, pour tout $\lambda > \Lambda$,

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{\pi} h(x) e^{i\lambda x} dx \right| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} ([h(x) - f(x)] + f(x)) e^{i\lambda x} dx \right| \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |h(x) - f(x)| dx + \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{i\lambda x} dx \right| \\ &< \|h - f\|_1 + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

D'où $\left| \int_{-\pi}^{\pi} h(x) e^{i\lambda x} dx \right| \rightarrow 0$ lorsque $\lambda \rightarrow \infty$.

d) C'est exactement la même démarche qu'au c), mais on utilise l'exercice 6 plutôt que l'exercice 4.

Exercice 6. (Optionnel) (Analyse 2). Montrer que les fonctions continues sur $[a, b]$ sont denses parmi les fonctions Riemann-intégrables sur $[a, b]$, selon $\|\cdot\|_1$ et selon $\|\cdot\|_2$.

Indication. Pour $\varepsilon > 0$, il existe une partition $P = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$ telle que $\int_a^b f - I(f, P) < \varepsilon$. Considérer une fonction en escalier s_P par $s_P(x) = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f$ si $x \in [x_i, x_{i+1})$ et $s_P(b) = f(b)$.

Solution. Soit f une fonction Riemann-intégrable. Puisqu'elle est intégrable, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition $P = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$ telle que $0 \leq \int_a^b f - I(f, P) < \varepsilon$. Pour une telle partition, on définit la fonction en escalier $s_P(x) = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f$ si $x \in [x_i, x_{i+1})$ et $s_P(b) = f(b)$. Pour la suite, fixons $\varepsilon > 0$ et P et posons $s := s_P$.

Commençons par la norme $\|\cdot\|_1$. On voit que $\int_a^b s = I(f, P)$, donc $0 \leq \int_a^b (f - s) < \varepsilon$. Comme s est une fonction continue par morceaux, cela montre que les fonctions continues par morceaux sont denses parmi les fonctions Riemann-intégrables selon $\|\cdot\|_1$.

Ensuite, comme les fonctions continues sont denses parmi les fonctions continues par morceaux selon $\|\cdot\|_1$, cela montre qu'elles sont denses parmi les fonctions Riemann-intégrables. En effet, pour $\varepsilon > 0$, il existe s continue par morceaux avec $\|f - s\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ et il existe g continue telle que $\|s - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. Il suit que

$$\|f - g\|_1 \leq \|f - s\|_1 + \|s - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Pour la norme $\|\cdot\|_2$, on peut utiliser le fait que f est bornée, disons par M , et que $-|f| \leq s \leq |f|$ sur $[a, b]$, donc $|s| \leq M$. On a

$$|f - s|^2 = |f - s||f + s| \leq (|f| + |s|)|f - s| \leq 2M|f - s|.$$

En intégrant, on obtient $\|f - s\|_2^2 \leq 2M\|f - s\|_1$. Ainsi, si s est telle que $\|f - s\|_1 < \frac{\varepsilon}{2M+1}$, alors $\|f - s\|_2 < \varepsilon$. Cela montre que les fonctions continues par morceaux sont denses parmi les fonction Riemann-intégrables. On peut utiliser le même argument que le paragraphe précédent pour déduire que les fonctions continues y sont également denses.