

Analyse appliquée

Convergence simple, uniforme, en norme

Exercice 1. Calculer la limite simple des suites suivantes.

- a) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(nx)}{nx}, & \text{si } x \neq 0, \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$ b) $f_n(x) = x^n e^{-nx}, x \in [1, \infty)$
- c) $f_n(x) = \tan\left(\frac{x}{n}\right)$

Exercice 2. Montrer que

$$\int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{(2n-1)(2n+1)} dx \right) = 0.$$

Exercice 3. a) Montrer que $\|f\|_2 \leq C\|f\|_\infty$ sur $[a, b]$, où C est une constante. Identifier C par rapport à a et b .

b) Montrer que $\|f\|_1 \leq D\|f\|_2$ sur $[a, b]$, où D est une constante. Identifier D par rapport à a et b .

Indice. Vous pouvez vous sauver un peu de travail en faisant appel à une inégalité dans les exercices de la semaine 2.

c) Montrer que si $f_n \rightarrow f$ uniformément, alors $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$ et $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Exercice 4. En classe, on a montré que les fonctions continues sur $[a, b]$ sont denses parmi les fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$, selon $\|\cdot\|_2$ (c'est-à-dire si f est continue par morceaux, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe g continue telle que $\|f - g\|_2 < \varepsilon$). Montrer que c'est également le cas selon $\|\cdot\|_1$ sur $[a, b]$.

Exercice 5. (Lemme de Riemann-Lebesgue) Soit $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction.

- a) Montrer que si f est de classe C^1 , c'est-à-dire que f est dérivable sur $[-\pi, \pi]$ et f' est continue sur $[-\pi, \pi]$, alors

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{i\lambda x} dx = 0. \quad (*)$$

Indice. Intégrez par parties.

- b) Soit $g: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Montrer que g vérifie $(*)$ en utilisant le a) et le théorème d'approximation de Weierstrass : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme p tel que $\|p - g\|_{\infty} < \varepsilon$.
- c) Soit $h: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux. Montrer que h vérifie $(*)$ en utilisant le b) et la propriété de *densité* des fonctions continues parmi les fonctions continues par morceaux (voir exercice 4).
- d) (Optionnel) Soit $k: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction est Riemann-intégrable sur $[-\pi, \pi]$. Montrer $(*)$ en utilisant le b) et l'exercice 6.

Exercice 6. (Optionnel) (Analyse 2). Montrer que les fonctions continues sur $[a, b]$ sont denses parmi les fonctions Riemann-intégrables sur $[a, b]$, selon $\|\cdot\|_1$ et selon $\|\cdot\|_2$.

Indication. Pour $\varepsilon > 0$, il existe une partition $P = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$ telle que $\int_a^b f - I(f, P) < \varepsilon$. Considérer une fonction en escalier s_P par $s_P(x) = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f$ si $x \in [x_i, x_{i+1})$ et $s_P(b) = f(b)$.