

Analyse appliquée

Coefficients de Fourier

Exercice 1. Soit $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On suppose qu'elle est sommable, c'est-à-dire que $\int_{-\pi}^{\pi} |f|$ est convergente. (Remarque : si f est intégrable, alors elle est bien sûr sommable. Sinon, on voit l'intégrale comme une intégrale impropre et l'hypothèse signifie alors que cette intégrale impropre est convergente.) Montrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, les intégrales

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{i\xi x} dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(\xi x) dx \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(\xi x) dx$$

sont toutes absolument convergentes.

Solution. Cela découle du fait que

$$|f(x) e^{i\xi x}| = |f(x)|, \quad |f(x) \cos(\xi x)| \leq |f(x)|, \quad |f(x) \sin(\xi x)| \leq |f(x)|.$$

Exercice 2. Montrer que

$$\sum_{k=1}^N \sin(kx) = \frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}x\right) \sin\left(\frac{N}{2}x\right)}{\sin(x/2)}.$$

Suggestion. Calculer $\sum_{n=0}^N e^{inx}$ comme une somme géométrique et considérer les parties réelles ou imaginaires.

Solution. On a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N e^{inx} &= \frac{1 - e^{i(N+1)x}}{1 - e^{ix}} && \text{(somme géométrique)} \\ &= \frac{e^{i\frac{N+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}} \frac{e^{-i\frac{N+1}{2}x} - e^{i\frac{N+1}{2}x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} \\ &= \frac{e^{i\frac{N+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}} \frac{e^{-i\frac{x}{2}} - 2i \sin\left(\frac{N+1}{2}\right)}{e^{-i\frac{x}{2}} - 2i \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= e^{i\frac{N}{2}x} \frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \cos\left(i\frac{N}{2}x\right) \frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + i \sin\left(\frac{N}{2}x\right) \frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}. \end{aligned}$$

En prenant les parties imaginaire, on trouve

$$\sum_{n=0}^N \sin(nx) = \sin\left(\frac{N}{2}x\right) \frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

La série $\sum \frac{\sin(nx)}{n}$ est intéressante, car elle est conditionnellement convergente pour certaines valeurs de x (comme $x = \frac{\pi}{2}$), ce qui veut dire qu'elle ne peut pas être normalement convergente. Néanmoins, elle est uniformément convergente sur tous les compacts de $(0, 2\pi)$ (on dit alors qu'elle est *localement uniformément convergente*). La plupart des critères de convergence d'analyse 1 et 2 sont inefficaces. Le lemme d'Abel (exercice ci-bas) est une façon possible de montrer la convergence de la série. Le critère de Dirichlet, si vous le connaissez, s'appliquerait aussi. Une autre façon de montrer sa convergence est en utilisant des théorèmes de convergence de séries de Fourier, ce que vous aurez à faire dans le premier devoir.

Exercice 3. (Optionnel) (Analyse 1)

- a) (Somme par partie) Soit (a_n) et (b_n) deux suites et soit (s_n) la suite des sommes partielles de a_n . Montrer que

$$a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n = s_1(b_1 - b_2) + s_2(b_2 - b_3) + \cdots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_n b_n.$$

- b) (Lemme d'Abel) Soit (b_n) une suite décroissante et positive. Soit (a_n) une suite telle qu'il existe M, m tels que

$$m \leq a_1 + \cdots + a_n \leq M$$

pour tout n . Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$b_1 m \leq a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \leq M b_1.$$

Ensuite, montrer que pour tout $n, k \in \mathbb{N}^*$ avec $k \leq n$, on a

$$|a_k b_k + \cdots + a_n b_n| \leq (M - m) b_k.$$

Solution. a) On a

$$\begin{aligned} & s_1(b_1 - b_2) + s_2(b_2 - b_3) + \cdots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_n b_n \\ &= s_1 b_1 + \sum_{k=2}^n (s_k b_k - s_{k-1} b_k) \\ &= s_1 b_1 + \sum_{k=2}^n a_k b_k \\ &= \sum_{k=1}^n a_k b_k. \end{aligned}$$

b) D'abord, on a que

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n &= s_1(b_1 - b_2) + \cdots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_n b_n \\ &\leq M(b_1 - b_2) + \cdots + M(b_{n-1} - b_n) + M b_n \quad (\text{car } b_{k-1} - b_k \geq 0) \\ &= M b_1. \end{aligned}$$

Ensuite, on a que

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n &= s_1(b_1 - b_2) + \cdots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_n b_n \\ &\geq m(b_1 - b_2) + \cdots + m(b_{n-1} - b_n) + m b_n \quad (\text{car } b_{k-1} - b_k \geq 0) \\ &= m b_1. \end{aligned}$$

Ceci montre la première partie.

Pour la deuxième partie, on constate que pour tout $k \leq n$, on a

$$m - M \leq m - s_{k-1} \leq s_n - s_{k-1} \leq M - s_{k-1} \leq M - m.$$

Ainsi, on voit que pour tout $n, k \in \mathbb{N}$ avec $k \leq n$, on a

$$|a_k + \cdots + a_n| \leq M - m.$$

On applique donc la première partie aux suites $c_n := a_{k-1+n}$ et $d_n := b_{k-1+n}$, ce qui donne

$$(m - M)d_1 \leq c_1 d_1 + \cdots + c_{n-k+1} d_{n-k+1} \leq (M - m)d_1,$$

c'est-à-dire

$$(m - M)b_k \leq a_k b_k + \cdots + a_n b_n \leq (M - m)b_k.$$

Exercice 4. a) Montrer que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \tag{*}$$

converge sur $[0, 2\pi]$ en utilisant le lemme d'Abel et l'exercice 2.

b) Montrer que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sin\left(\frac{\pi}{N} n\right) = \frac{2}{\pi}.$$

c) (Optionnel) Adapter la démarche du a) pour montrer que la convergence est uniformément sur $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ pour tout $\varepsilon > 0$.

d) (Optionnel) Dédurre à partir du b) que la série ne converge pas uniformément sur $[0, 2\pi]$.

Solution. a) Il est clair que la série converge si $x = 0$ ou si $x = 2\pi$.

Soit maintenant $x \in (0, 2\pi)$. Par l'exercice 2, on a

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin(kx) \right| = \left| \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) \sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right| \leq \frac{1}{\left| \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right|}.$$

Par le lemme d'Abel, on a pour $m > n$

$$\left| \sum_{k=n}^m \frac{\sin(kx)}{k} \right| \leq \frac{2}{n \left| \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right|}.$$

On laisse $m \rightarrow \infty$ pour obtenir

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} \right| \leq \frac{2}{n \left| \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right|}.$$

Autrement dit, on a

$$\left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin(kx)}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} \right| \leq \frac{2}{n \left| \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right|},$$

donc la série converge par le théorème des deux gendarme.

b) Par l'exercice 2, on a

$$\sum_{k=1}^N \sin\left(\frac{\pi}{N}n\right) = \frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}\frac{\pi}{N}\right) \sin\left(\frac{N}{2}\frac{\pi}{N}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2N}\right)}.$$

Il suit que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N \sin\left(k\frac{\pi}{N}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sin\left(\frac{N+1}{2}\frac{\pi}{N}\right) \sin\left(\frac{N}{2}\frac{\pi}{N}\right) \right) \left(\frac{\frac{1}{N}}{\sin\left(\frac{\pi}{2N}\right)} \right) = 1 \times 1 \times \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}.$$

Voici une autre solution. On remarque que $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sin\left(\frac{\pi}{N}n\right)$ est une somme de Riemann à un facteur π près et donc

$$\frac{1}{\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi}{N} \sum_{k=0}^N \sin\left(k\frac{\pi}{N}\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{2}{\pi}.$$

c) On prend la même démarche qu'au a), mais cette fois on utilise le fait que pour tout $\varepsilon \leq x \leq 2\pi - \varepsilon$, on a $\sin(x/2) \geq \sin(\varepsilon/2) = \sin((2\pi - \varepsilon)/2)$. Par l'exercice 2 encore, on a

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin(kx) \right| = \left| \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) \sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right| \leq \frac{1}{\left| \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \right|}.$$

Par le lemme d'Abel, on a, pour tout $m \geq n$,

$$\left| \sum_{k=n}^m \frac{\sin(kx)}{k} \right| \leq \frac{2}{n \left| \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \right|}.$$

On laisse $m \rightarrow \infty$ pour obtenir

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} \right| \leq \frac{2}{n \left| \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \right|}.$$

Si on prend le supremum sur $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, on voit que

$$\sup_{[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]} \left| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} \right| \leq \frac{2}{n \left| \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \right|} \rightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow \infty$, d'où la série converge uniformément.

d) Supposons le contraire, c'est-à-dire que $\sum \frac{\sin(nx)}{n}$ est uniformément convergente. On pose $f(x) = \sum \frac{\sin(nx)}{n}$. Comme chaque $\sin(nx)$ est continue, par un théorème d'analyse 2, la limite f l'est aussi sur $[0, 2\pi]$. En particulier, pour $x_N = \frac{\pi}{N}$, on a $f(x_N) \rightarrow f(0) = 0$ lorsque $N \rightarrow \infty$ par continuité.

Ensuite, par le b), en utilisant la définition de limite avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que si $N \geq M$, alors

$$\frac{1}{N} \left| \sum_{n=1}^N \sin\left(\frac{\pi}{N}n\right) \right| \geq \frac{1}{\pi}.$$

De plus, on sait que pour tout $0 \leq n \leq N$, on a que $\sin\left(\frac{\pi}{N}n\right) \geq 0$, donc on trouve

$$\left| \sum_{n=1}^N \frac{\sin\left(\frac{\pi}{N}n\right)}{n} \right| = \sum_{n=1}^N \frac{\sin\left(\frac{\pi}{N}n\right)}{n} \geq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sin\left(\frac{\pi}{N}n\right) \geq \frac{1}{\pi}$$

pour tout $N \geq M$. Il suit que $\sum_{n=1}^N \frac{\sin\left(\frac{\pi}{N}n\right)}{n} \not\rightarrow 0 = f(0)$. Ceci contredit le fait que f est continue.

Remarque. La vraie contradiction découle du résultat suivant, qui est un exercice du niveau d'analyse 2 : si $f_n \rightarrow f$ uniformément sur X , si chaque f_n est continue et si (x_n) est une suite de X telle que $x_n \rightarrow x \in X$, alors $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Dans notre cas, avec $f_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{\sin(nx)}{n}$, on aurait dû avoir $f_N(x_N) \rightarrow f(0) = 0$, mais on a montré que $f_N(x_N) \geq \frac{1}{\pi}$.